EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul. $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u qui appartiennent à $\mathbb{K}$, ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres réelle de u et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de u.
On note θ l'endomorphisme nul de E, donc $\forall x \in E, \quad \theta(x) = 0$.

1) Démontrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \neq \emptyset$.

2) Donner un exemple d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$. (On pourra proposer un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ et considérer l'endomorphisme canoniquement associé à M.)

3) Démontrer que si $u^3 + u = \theta$ alors $\ker(u) = \ker(u^2)$. (Indication : On peut utiliser le lemme des noyaux).

4) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. et que $u \in \mathcal{L}(E)$ tel $u^3 + u = \theta$.

- **a)** Démontrer que u est diagonalisable.
- **b)** Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?

5) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. et que $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(\star) \quad \begin{cases} u^3 + u = \theta \\ u \text{ est inversible.} \end{cases}$$

- **a)** Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
- **b)** Démontrer que si u n'est pas une homothétie alors il existe une base $\mathscr{V}$ de E et un nombre complexe λ tel que

$$\underset{\mathscr{V}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & \mathbf{O}_{p,q} \\ \mathbf{O}_{q,p} & \overline{\lambda} I_q \end{pmatrix}$$

  où $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p + q = n$ et $\mathbf{O}_{p,q}$ et $\mathbf{O}_{q,p}$ sont les matrices nulles respectives de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$. Préciser λ.
- **c)** Donner un exemple d'endomorphisme u qui vérifie les conditions $(\star)$ ci-dessus dans le cas $E = \mathbb{C}^3$. (On pourra proposer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et considérer l'endomorphisme canoniquement associé à M.)

6) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que

$$(\star) \quad \begin{cases} u^3 + u = \theta \\ u \text{ est inversible.} \end{cases}$$

- **a)** Démontrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$.
- **b)** En déduire que n est pair.
- **c)** Démontrer que pour tout vecteur non nul x de E, la famille $(x, u(x))$ est libre.
- **d)** Donner un exemple d'endomorphisme u qui vérifie les conditions $(\star)$ ci-dessus, dans le cas $E = \mathbb{R}^4$. (On pourra considérer l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qu'on proposera).

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.
On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.
On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.
Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1) Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_A$.
Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3) Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

4) En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

5) Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6) On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

a) Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b) Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

c) En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

7) On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i) Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

ii) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

iii) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(X \neq 0)$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(Y \neq 0)$ tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \overline{z}Y$.

En calculant $\phi_A(X\,{}^tY)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c) Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8) Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

9) Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_A$.

10) *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soient $B \in \ker \phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c) En déduire $\ker \phi_A$.

11) *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

b) En déduire que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c) Préciser la dimension de $\ker \phi_A$.

d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

Partie IV. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\phi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

14) Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul (π_B' étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

15) En déduire que $B^d = 0$.