

QUESTIONS COURTES OU DE COURS

1. Quels sont les générateurs du groupe monogène additif $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Quelle est la forme générale d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$? (on ne demande pas de preuve).
3. Quel est le sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ engendré par $\mathbb{N}$?
4. On considère le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ des nombres rationnels. Soit $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$. Démontrer que le sous-groupe $\langle A \rangle$ engendré par A est monogène et préciser ses générateurs.
5. Prouver que le groupe $H = \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Est-ce que G est cyclique ? si oui quel est le nombre de ses générateurs.
6. Donner la définition de l'indicatrice d'Euler φ .
7. Calculer $\varphi(2200)$.
8. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif intègre. Donner la définition d'un élément irréductible de $(A, +, \times)$.

PROBLÈME 1

Partie 1 : Anneaux $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

Soit n un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier. On désigne par $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt{n}$, où a et b sont des entiers relatifs quelconques.

1. (a) Démontrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
(b) Montrer que l'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ définie par $(a, b) \mapsto a + b\sqrt{n}$ est bijective.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
On rappelle que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{n}])$ est l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et que c'est un groupe pour la multiplication.
3. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est-il intègre ?
4. Montrer que l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{n}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \\ x = a + b\sqrt{n} & \longmapsto & \psi(x) = a - b\sqrt{n} \end{cases}$$

est un morphisme d'anneau involutif de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

Rappel :

un morphisme Θ d'un anneau $(R, +, \times)$ vers $(R, +, \times)$ est dit involutif lorsque $\Theta \circ \Theta = \text{Id}_R$.

5. Pour tout élément x de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, on considère le produit $N(x) = x\psi(x)$.
 - (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}], \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
 - (b) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]^2, \quad N(xy) = N(x)N(y)$.
6. Montrer qu'un élément x de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ si et seulement si $|N(x)| = 1$.

Partie 2 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

On rappelle ce qui suit :

- On dit que deux éléments x et y de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sont associés si et seulement si

$$\exists \varepsilon \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}]), \quad y = \varepsilon x.$$

- Si $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ alors x est irréductible si et seulement si x n'est pas inversible et les seuls diviseurs de x sont les inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et les associés de x dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ un élément non inversible. Démontrer que x est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ si et seulement si :

$$\forall y, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}], \quad yz = x \Rightarrow y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}]) \quad \text{ou} \quad z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}]).$$

2. (a) Justifier que $u = 2 + \sqrt{5} \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])$ et préciser u^{-1} .
 (b) Démontrer que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])$ possède une infinité d'éléments.
3. (a) Soit $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, montrer que $\gamma^2 - 5\delta^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}\}$.
 (b) En déduire qu'il n'existe pas d'entiers relatifs c et d tels que $|c^2 - 5d^2| = 2$.
 (c) En déduire que l'élément 2 est irréductible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
4. Soit I l'ensemble des éléments $x = a + b\sqrt{5}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tels que les entiers a et b soient de même parité. Démontrer que I est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
5. On suppose que l'idéal I est engendré par un élément x .
 - (a) Montrer qu'il existe des éléments y et z de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tels que $2 = xy$ et $1 + \sqrt{5} = xz$.
 - (b) Trouver une contradiction.
 - (c) Que peut-on dire de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

PROBLÈME 2

Notations et rappels :

Dans tout ce problème :

- $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec $n \geq 1$.
- Id désigne l'application identique de E et θ l'application de E vers E identiquement nulle, c'est-à-dire que : $\forall x \in E, \quad \begin{cases} \text{Id}(x) = x \\ \theta(x) = 0 \end{cases}$
- $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .
- Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit u^m par : $\begin{cases} u^0 = \text{Id} \\ \forall m \in \mathbb{N}, u^{m+1} = u^m \circ u \end{cases}$, donc si $m \in \mathbb{N}^*$ alors $u^m = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{m \text{ fois}}$.
- Un projecteur de E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$.

Partie I : Noyaux itérés, endomorphisme nilpotent

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \text{Im } u^k$.

1. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} N_k \subset N_{k+1} \\ I_{k+1} \subset I_k \end{cases}$.
2. Démontrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, N_m = N_{m+1} \Leftrightarrow I_m = I_{m+1}$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_m = N_{m+1}$. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq m \Rightarrow N_k = N_m \quad \text{et} \quad I_k = I_m$$

4. Démontrer que $\exists m \in \mathbb{N}^*, N_m = N_{m+1}$. On définit alors l'entier naturel

$$\pi(u) = \min \{m \in \mathbb{N}^* / N_m = N_{m+1}\}$$

5. (a) Calculer $\pi(\text{Id})$ et $\pi(\theta)$.
(b) Soit f un isomorphisme de E , calculer $\pi(f)$.
(c) Soit f un projecteur de E . Calculer $\pi(f)$.
6. Démontrer que si $p = \pi(u)$ alors $\ker(u^p) \oplus \text{Im}(u^p) = E$.
7. On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = \theta$. Si c'est le cas l'entier naturel $\nu(u) = \min \{k \in \mathbb{N}^* / u^k = \theta\}$ s'appelle l'indice de nilpotence de u . On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice de nilpotence p .
(a) Donne $\pi(u)$ en fonction de p .

- (b) Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{F} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.
- (c) En déduire que $p \leq n$.
- (d) Prouver que pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on a f est nilpotent si et seulement si $f^n = \theta$.

Partie 2 : Exemple dans $\mathbb{R}^3$

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, u(X) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y + 2z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} ..$$

On note $A = \underset{\mathcal{E}}{\text{mat}}(u)$ la matrice de u relativement à $\mathcal{E}$.

1. Déterminer A puis calculer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(A^2)$.
2. Déterminer $N_k = \ker u^k$ et $I_k = \text{Im } u^k$, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
3. En déduire $\pi(u)$. On note alors $p = \pi(u)$.
4. Vérifier qu'on a effectivement $\ker u^p \oplus \text{Im } u^p = E$.
5. On considère les vecteurs : $\begin{cases} \omega_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ \omega_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ \omega_3 = e_1 + e_2 - e_3 \end{cases}$, et on note :

$$F = \text{Vect}(\omega_1, \omega_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(\omega_3).$$

- (a) Prouver que $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base de E .
- (b) Montrer que $\text{Im } u = F$ et $\ker u = G$. En déduire que l'on a :

$$u(F) \subset F \quad \text{et} \quad u(G) \subset G$$

- (c) Démontrer que l'application $g : F \rightarrow F; x \mapsto g(x) = u(x)$ est un isomorphisme de F et calculer la matrice $A_1 = \text{mat}_{\mathcal{V}}(g)$, où $\mathcal{V} = (\omega_1, \omega_2)$.
- (d) Calculer $A' = \text{mat}_{\mathcal{W}}(u)$ où $\mathcal{W} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

- (e) Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que : $(\star) \begin{cases} AB = BA \\ A^2B = A \\ B^2A = B \end{cases}$

- (f) Démontrer que B vérifiant les conditions $(\star)$ est unique.

6. Démontrer que $\text{Im } u = \ker(u^2 - 3u + 6\text{Id})$

b