1 Partie 1

1) a) On a $\chi_{M_1} = X^2 - \mathrm{tr}(M_1)X + \det(M_1) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp}(M_1) = \{1\}$, donc 1 est la seule valeur propre de M_1, il en découle que $f_1(\omega_1) = \omega_1$, donc $M_1\omega_1 = \omega_1$, donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\alpha \\ -4+3\alpha \end{pmatrix}$$

donc $\alpha = 2$ et finalement $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est l'unique vecteur propre de la matrice M_1, de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

On a $\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\det_C(\omega_1, \omega_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, donc la famille $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.

On a $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $f_1(\omega_1) = \omega_1$ et $f_1(\omega_2) = f_1(e_2) = e_1 + 3e_2 = \omega_1 + \omega_2$, on a $T_1 = \mathrm{mat}_\Omega(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) M_1 est trigonalisable car toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

c) D'après la question I.1.a) on a $\mathrm{mat}_C(f_1) = M_1$ et $\mathrm{mat}_\Omega(f_1) = T_1$ et $Q_1 = \mathscr{P}_C^\Omega$ est la matrice de passage de C à Ω, d'après les formules de changement de base on a $M_1 = Q_1 T_1 Q_1^{-1}$ et notons que $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.a) On calcule $\chi_M = (X-1)^3$, pour le calcul on fait tout au début l'operation $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ et on factorise par $(X-1)$. On fait l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour faire apparaître un nouveau 0 dans la première colonne. On a $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$, il en découle que si M est diagonalisable alors $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ et $\Delta = \mathrm{diag}(1,1,1)$, donc $M = I_3$, ce qui est contradictoire, donc M n'est pas diagonalisable.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, alors :

$$\begin{aligned} X \in E_1(M) &\Leftrightarrow MX = X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

il en découle que le vecteur demandé est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• On a $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{V}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) On a $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $v_1 = e_1 - e_3, v_2 = e_2, v_3 = e_3$ on déduit $e_1 = v_1 + v_3, e_2 = v_2, e_3 = v_3$, par suite $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il en découle que $Q^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, donc aussi $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

• Déduction : On remarque que $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la question I.1.c), on a prouvé que $M_1 = Q_1 T_1 Q_1^{-1}$, avec $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il en découle que $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & Q_1 T_1 Q_1^{-1} \end{pmatrix}$. Posons $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, c'est une matrice par blocs inversible d'inverse $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a le calcul suivant de produit de matrices par blocs :

$$T = P_1^{-1} Q^{-1} M Q P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & Q_1 T_1 Q_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit si on pose $P = QP_1$, on a $T = P^{-1}MP$ avec P inversible et T triangulaire supérieure. Un calcule donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et on résume par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui constitue une trigonalisation de M.

3) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique ; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes de la diagonale . Donc si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à $T \in T_n(\mathbb{C})$, alors les termes diagonaux de T sont les valeurs propres de A

4) a) Par hypothèse : $j < i \Rightarrow s_{i,j} = t_{i,j} = 0$. Soit $U = ST = (u_{i,j})$: $u_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k} t_{k,j}$. Si $i > j$ alors pour $k < i$: $s_{i,k} = 0$ et pour $k \geq i$, $k > j \Rightarrow t_{k,j} = 0$ donc $u_{i,j} = 0$.
Donc $ST \in T_n(\mathbb{C})$. Enfin si $i = j$ seul $k = i$ donne un terme non nul : $u_{i,i} = s_{i,i} t_{i,i}$
b) On prend $S = T$: $T^2 \in T_n(\mathbb{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^2$. Par récurrence : si $T^p \in T_n(\mathbb{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^p$, on prend $S = T^p$ d'où $T^{p+1} \in T_n(\mathbb{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^{p+1}$.

5) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après 2) , $\exists T \in T_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $T = P^{-1}AP$. D'après 4) , les termes diagonaux $t_{1,1}, ..., t_{n,n}$ de T sont les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A . D'après 5) , les termes diagonaux de T^k sont $(\lambda_1)^k, ..., (\lambda_n)^k$; d'après 4) et $T^k = P^{-1}A^kP$, ce sont les valeurs propres de A^k . Donc $\rho(A^k) = \max\left\{\left|(\lambda_i)^k\right| , 1 \leq i \leq n\right\} = (\max\{|\lambda_i| , 1 \leq i \leq n\})^k$
Conclusion : $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$

6) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\psi(A)$ existe et $\psi(A) \geq 0$; $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$; $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\psi(\lambda A) = |\lambda|\, \psi(A)$; $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\psi(A+B) \leq \psi(A) + \psi(B)$: ψ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$
Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$ tq $\forall i, j$, $u_{i,j} = 1$: $\psi(U) = 1$, $U^2 = nU$ donc $\psi(U^2) = n$ et si $n \geq 2$ l'inégalité : $\psi(U \times U) \leq \psi(U) \times \psi(U)$ n'est pas vérifiée , donc ψ n'est pas une norme matricielle

7) La norme N et une norme matricielle φ sont équivalentes car $M_n(\mathbb{C})$ est un EV de dim finie .
Par définition : $\exists \alpha , \beta > 0$ tq $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\alpha\varphi(A) \leq N(A) \leq \beta\varphi(A)$
Alors $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $N(AB) \leq \beta\varphi(AB) \leq \beta\varphi(A)\varphi(B) \leq \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$

8) Soit $\forall k$, $B_k = P^{-1}A_kP$ et $B = P^{-1}AP$. $\forall k$, $B_k - B = P^{-1}(A_k - A)P$
Soit N une norme matricielle : $0 \leq N(B_k - B) \leq N(P^{-1})N(A_k - A)N(P)$ d'où : $N(A_k - A) \to 0$ qd $k \to +\infty \Rightarrow N(B_k - B) \to 0$ qd $k \to +\infty$
Réciproque : si (B_k) CV vers B , alors (PB_kP^{-1}) CV vers PBP^{-1} d'où (A_k) CV vers A

9) a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$. A_k de terme général $a_{i,j}^{(k)}$ CV vers A si et seulement si $\forall i, j$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = 0$. Donc la suite $\left(T^k\right)$ converge si et seulement si les suites complexes $\left(\lambda^k\right)$ et $\left(k\lambda^{k-1}\mu\right)$ convergent. On va distinguer les divers cas possibles ensuite, on fera une synthèse :
• Si $|\lambda| < 1$,
• il est connu que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda^k = 0$.
• Par ailleurs, on a aussi dans ce cas $\lim\limits_{k\to+\infty} k\lambda^{k-1} = 0$, chose claire si $\lambda = 0$, sinon $0 < |\lambda| < 1$, donc

$$|k\lambda^{k-1}| = k\exp((k-1)\ln|\lambda|) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• Si $|\lambda \geq 1$ alors si on suppose que $\lambda^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ forcément $\ell \neq 0$ et on a aussi $\lambda^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Comme $\lambda^k \neq 0$, on a $1 = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k} = \lambda$, donc $\lambda = 1$.
• Il en découle que si $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, la suite (A^k) est divergente.
• Il reste le cas $\lambda = 1$, pour lequel (A^k) converge si et seulement si (μk) est convergente si et seulement si $\mu = 0$.
• Il découle de cette analyse que la suite (A^k) converge si et seulement si $|\lambda| < 1$, pour lequel $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = O_2$, ou $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, pour lequel $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = I_2$.

b) $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{pmatrix}$. D'après 9) $\left(A^k\right)$ CV ssi $\left(D^k\right)$ CV . Les cas de CV sont :

$$\left\{\begin{array}{c} |\lambda_i| < 1 \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2 \text{ (limite } 0_2) \\ \lambda_i = 1 \text{ et } |\lambda_j| < 1 \text{ pour } i \neq j \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \end{array}\right.$$

c) Si A n'est pas diagonalisable , nécéssairement ses valeurs propres sont égales . D'après 2) elle est trigonalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\mu \neq 0$ (sinon A serait diagonalisable) . Donc d'après a) , la suite $\left(T^k\right)$ CV ssi $|\lambda| < 1$ et d'après 9) , $\left(A^k\right)$ CV ssi $\left(T^k\right)$ CV . Ici $\rho(A) = |\lambda|$. Donc $\left(A^k\right)$ CV ssi $\rho(A) < 1$ et la limite est 0_2

d) D'après b) , si A est diagonalisable : $\left(A^k\right)$ CV vers 0_2 ssi ($|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_1| < 1$) , ssi $\rho(A) < 1$. En conclusion de b) et c) : $\left(A^k\right)$ CV vers 0_2 ssi $\rho(A) < 1$

2 Partie 2

1) a) Posons $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$. On a $\forall j$, $|x_j| \leq N_\infty(X)$, donc $|y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) N_\infty(X) \leq M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.

b) L' application $\varphi_A : X \mapsto AX$ est une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}^n$ muni de la norme N , donc elle est continue (dimension finie). Donc il existe une constante C_A tel que $N(\varphi_A(X)) \leq C_A N(X)$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$. Donc $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X)$

> Une autre méthode est d'utiliser l'équivalence des normes. Notamment N et N_∞ sont équivalentes

> donc il existe α, β tel que $\alpha N_\infty \leq N \leq \beta N_\infty$, donc $N(AX) \leq \beta \mathbb{N}_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \leq \frac{\beta M_A}{\alpha} N(X)$

c) $\forall X \neq 0$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq C_A$. L'ensemble $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)} \text{ , } X \in \mathbb{C}^n - \{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ donc admet une borne supérieure .

d) Cette borne sup est le plus petit majorant et C_A est un majorant donc $\widetilde{N}(A) \leq C_A$. Dans le cas de la norme N_∞ , on peut prendre $C_A = M_A$ donc : $\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A$.

e) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow GX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. On a : $N_\infty(X_0) = 1 , N_\infty(GX_0) = 10$ d'où $\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10 \Rightarrow \widetilde{N}_\infty(G) \geq 10$. De plus $M_G = 10$ donc $\widetilde{N}_\infty(G) \leq 10$. Conclusion : $\widetilde{N}_\infty(G) = M_G = 10$

2) $\forall j$, $|y_j| = 1 \Rightarrow N_\infty(Y) = 1$. Soit $Z = AY$. $\forall i$, $|z_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq M_A$
Si $a_{i_0 j} = 0$ alors $a_{i_0,j} y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$, sinon $a_{i_0,j} y_j = |a_{i_0,j}|$ car $\forall u \in \mathbb{C}^*$, $u\frac{\overline{u}}{|u|} = |u|$. Donc $z_{i_0} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$. $N_\infty(Z) = M_A \Rightarrow \frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} = M_A \Rightarrow \widetilde{N}_\infty(A) \geq M_A$. En utilisant 1)d) on peut conclure : $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$

3) a) $\widetilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0 , N(AX) = 0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0 , AX = 0 \Leftrightarrow \forall X$, $AX = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$

b) $\forall X \neq 0 , \frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = \frac{|\lambda| N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \, \widetilde{N}(A)$ donc $\widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \, \widetilde{N}(A)$

c) Si $\lambda \neq 0$: $\widetilde{N}(A) = \widetilde{N}(\frac{1}{\lambda}\lambda A) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \widetilde{N}(\lambda A) \Rightarrow |\lambda|\, \widetilde{N}(A) \leq \widetilde{N}(\lambda A)$ d'où $|\lambda|\, \widetilde{N}(A) = \widetilde{N}(\lambda A)$
Si $\lambda = 0$ on a égalité car les 2 membres sont nuls .

d) $\forall X \neq 0$, $N[(A+B)X] = N(AX+BX) \leq N(AX)+N(BX) \Rightarrow \frac{N[(A+B)X]}{N(X)} \leq \frac{N(AX)}{N(X)} + \frac{N(BX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A)+ \widetilde{N}(B)$ donc $\widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A)+ \widetilde{N}(B)$

e) $\forall X \neq 0$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A) \Rightarrow N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$ et si $X = 0$ les 2 membres sont nuls .

f) On déduit de a),c),d) que $\widetilde{N}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$. De plus : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $N(ABX) \leq \widetilde{N}(A)N(BX) \leq \widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)N(X)$ d'où : $\widetilde{N}(AB) \leq \widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)$
Conclusion : $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ (ce qui en prouve l'existence)

4)a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $AX = \lambda X \Rightarrow \frac{N(AX)}{N(X)} = |\lambda|$ donc $|\lambda| \leq \widetilde{N}(A)$. En particulier pour λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Donc $\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)$

b) Si $A = I_n$: $\rho(A) = 1$ et $\forall X$, $AX = X$ donc $\widetilde{N}(A) = 1$: on a égalité .

c) Si $A \neq 0_n$ alors $\widetilde{N}(A) \neq 0$ d'après 3)a) . Si de plus A est nilpotente , sa seule valeur propre est 0 donc $\rho(A) = 0$ et : $\rho(A) < \widetilde{N}(A)$

d) Si $\left(A^k\right)$ converge vers 0_n alors $\widetilde{N}(A^k) \to 0$ qd $k \to +\infty$. $[\rho(A)]^k = \rho(A^k) \leq \widetilde{N}(A^k)$ donc $[\rho(A)]^k \to 0$ qd $k \to +\infty$. D'où : $\rho(A) < 1$.

5) a) On a $m'_{ij} = \alpha_i \beta_j m_{ij}$. On en déduit pour le cas indiqué : $m'_{ij} = p^i p^{-j} m_{ij} = p^{i-j} m_{ij}$

b) Soit $X = (x_i) \in \mathbb{C}^n$, alors $\|DX\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 |x_k|^2 \leq (\rho(D))^2 \|X\|_2^2$. Il en découle que $\|D\|_2 \leq \rho(D)$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\rho(A) = |\lambda_j|$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], (X_0)_i = \delta_{ij}$ On a $\|X_0\| = 1$ et $\|DX_0\| = |\alpha_j| = \rho(D)$

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X, Y \in \mathbb{C}^n$, on a :
- si $\|X\|_Q = 0$ alors $QX = 0$ et comme Q est inversible on a $X = 0$.
- $\|X + Y\|_Q = \|Q(X + Y)\| = \|QX + QY\| \leq \|QX\| + \|QY\| = \|X\|_Q + \|Y\|_Q$.
- $\|\lambda X\|_Q = \|\lambda QX\| = |\lambda|\|QX\| = |\lambda|\|X\|_Q$

6)
a) Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a A est trigonalisable, donc il existe T triangulaire supérieure et P inversible tel que $A = PTP^{-1}$. Les λ_k sont les valeurs propres de A.

b) Le terme général que T_p est $t_{pij} = p^{i-j} t_{ij}$, donc :
Si $i > j$ on a $t_{pij} = 0$.
Si $i = j$ on a $t_{pij} = \lambda_i$
Si $i < j$ on a $t_{pij} = t_{ij} p^{i-j} \to 0$, quand $p \to +\infty$ puisque $i - j < 0$
Donc $\lim\limits_{p \to +\infty} T_p = \Delta$

c) Par définition de la limite il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on a : $\|T_p - \Delta\|_2 < \varepsilon$. En particulier pour $m = p_0$, on a : $\|T_m - \Delta\|_2 < \varepsilon$, donc :

$$\|T_m\|_2 - \|\Delta\|_2 \leq \|T_m - \Delta\|_2 < \varepsilon$$

Compte tenu de $\|\Delta\|_2 = \rho(\Delta) = \rho(A)$, on a alors :

$$\|T_m\|_2 \leq \varepsilon + \rho(A)$$

soit :

$$\|D_m T D_m^{-1}\|_2 \leq \varepsilon + \rho(A)$$

d) On a $T = P^{-1}AP$, donc le résultat de c) ci-dessus donne :

$$\|D_m P^{-1} A P D_m^{-1}\|_2 \leq \varepsilon + \rho(A) = \frac{1+\rho(A)}{2}.$$

Posons $Q = D_m P^{-1}$. Il vient : $\|A\|_Q < \frac{1+\rho(A)}{2}$.

e) Posons $\tau = \frac{1+\rho(A)}{2}$, alors $\tau < 1$ Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \tau^p = 0$ Or d'après d) et compte tenu du fait que $\|.\|$ est une norme matricielle, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\|A^p\|_Q \leq (\|A\|_Q)^p \leq \tau^p \to 0$$

quand p tends vers $+\infty$.
Conclusion : $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = 0$

7) a) De l'inégalité vue en 5) on déduit pour $k \in \mathbf{N}^*$: $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}}$

b)Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle est trigonalisable, donc

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où P est une matrice inversible. Il en résulte que :

$$\alpha A = P \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \rho(\alpha A) &= \max\{|\alpha\lambda_k| / k \in [\![1, n]\!]\} \\ &= |\alpha| \max\{|\lambda_k| / k \in [\![1, n]\!]\} \\ &= |\alpha|\rho(A) \end{aligned}$$

c) On prend $\alpha = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}$ ($\alpha > 0$) et on applique a) : $\rho(A_\varepsilon) = \alpha\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$ car $\varepsilon > 0$
D'après la question II.6.e), et compte tenu de $\rho(A_\varepsilon) < 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}(A_\varepsilon)^k = 0$, donc $\exists k_\varepsilon$ tq $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\widetilde{N}\left((A_\varepsilon)^k\right) \leq 1$. $(A_\varepsilon)^k = \alpha^k A^k \Rightarrow \widetilde{N}\left((A_\varepsilon)^k\right) = \alpha^k \widetilde{N}(A^k)$ Donc $\alpha^k \widetilde{N}(A^k) \leq 1 \Rightarrow \widetilde{N}(A^k) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$.
d) $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A)+\varepsilon$: c'est la définition de $\lim\limits_{k\to+\infty}\left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

3 Partie 3

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A \geq 0$, $A \neq 0$ mais pas $A > 0$

2) a) Soit $U = AA'$; $V = BB'$. $\forall i,j$, $u_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}a'_{k,j}$; $v_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{i,k}b'_{k,j}$. Par hypothèse : $\forall i,j$, $0 \leq a_{i,j} \leq b_{i,j}$ et $0 \leq a'_{i,j} \leq b'_{i,j}$ donc $\forall i,j$, $0 \leq u_{i;j} \leq v_{i,j}$: $0 \leq AA' \leq BB'$

b) On prend $A' = A$ et $B' = B$ et on procède par récurrence .

c) Rappelons que $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$. Or $\forall i$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}$ d'où en passant au sup : $M_A \leq M_B$ donc $\widetilde{N}_\infty(A) \leq \widetilde{N}_\infty(B)$

d) D'après b) et c) : $\forall k$, $0 \leq A^k \leq B^k \Rightarrow \widetilde{N}_\infty(A^k) \leq \widetilde{N}_\infty(B^k) \Rightarrow \left[\widetilde{N}_\infty(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \left[\widetilde{N}_\infty(B^k)\right]^{\frac{1}{k}}$ d'où en passant à la limite : $\rho(A) \leq \rho(B)$

e) Par hyp : $\forall i,j$, $0 \leq a_{i,j} < b_{i,j}$. Si $A \neq 0_n$, soit $c = \sup_{i,j}\{\frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}\}$. On a un nombre fini de termes tous strictement inférieurs à 1 et non tous nuls donc $c < 1$ et $c > 0$. Si $A = 0_n$ tout $c \in]0,1[$ convient . $\forall i$, $a_{i,j} \leq cb_{i,j}$ donc $A \leq cB$
D'après d) et **II)6)b)** : $\rho(A) \leq c\rho(B)$. Enfin B admet au moins une valeur propre non nulle car $\mathrm{Tr}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} > 0$ et $\mathrm{Tr}(B)$ est la somme des valeurs propres de B . Donc $\rho(B) > 0$ et $c < 1$ donc $c\rho(B) < \rho(B)$ et en conclusion : $\rho(A) < \rho(B)$

3) Soit $V \in \mathbb{C}^n$ tq $\forall i$, $v_i = 1$. $AV = \alpha V$ donc $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ (et $\alpha \geq 0$) . On en déduit que : $\alpha \leq \rho(A)$. Pour cette matrice on a : $M_A = \alpha$ et d'après **II)2)** : $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A = \alpha$; d'après II 4)a) $\rho(A) \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ donc : $\widetilde{N}_\infty(A) = \rho(A) = \alpha$

4) Si $\alpha = 0$ l'inégalité $\alpha \leq \rho(A)$ est évidente . Si $\alpha > 0$, on a $\forall i$, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} = \frac{\alpha}{\alpha_i}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha$ B vérifie les hypothèses de 3) donc $\rho(B) = \alpha$. De plus $\forall i,j$, $0 \leq b_{i,j} \leq a_{i,j}$ donc $0 \leq B \leq A$ et d'après 2)d) : $\rho(B) \leq \rho(A)$. Donc $\alpha \leq \rho(A)$ et $\alpha = \min\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$. Finalement, d'après **II)4)a)**, on a $\rho(A) \leq \widetilde{N_\infty}(A) = M_A$ et $M_A = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = \max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

5) Soit $U = AD_x$: $\forall i, j$, $u_{i,j} = x_j a_{i,j}$ Soit $V = D_x^{-1} U$: $\forall i, j$, $v_{i,j} = \frac{1}{x_i} u_{i,j} = \frac{x_j}{x_i} a_{i,j}$. A et V sont semblables donc $\rho(A) = \rho(V)$. Notons $Y = AX$: $\sum\limits_{j=1}^{n} v_{i,j} = \frac{1}{x_i} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j a_{i,j} = \frac{y_i}{x_i}$ donc d'après la question 4) : $\min_i \frac{y_i}{x_i} \leq \rho(V) \leq \max_i \frac{y_i}{x_i}$ d'où : $\min_i \frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_i \frac{(AX)_i}{x_i}$

6) Si X est vecteur propre strictement positif de A : $AX = \lambda X$ et on peut appliquer 5) : $\forall i$, $\frac{(AX)_i}{x_i} = \lambda$ donc $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$ donc $\lambda = \rho(A)$; les ensembles $\left\{ \min_i \frac{(AX)_i}{x_i} \ , \ X > 0 \right\}$ et $\left\{ \max_i \frac{(AX)_i}{x_i} \ , \ X > 0 \right\}$ admettent $\rho(A)$ pour respectivement maximum et minimum .