Centre Salmane El Farissi	DL 5	2025/2026
CPGE , Salé	Donné le : 26-11-2025	trimestre 1
MP2	Á rendre le : 04-12-2025	

Problème

L'objectif du problème est l'étude de divers aspects topologiques de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de fournir quelques applications algébriques des résultats établis.

Conventions et notations

De façon usuelle, $\mathbb{K}$ désignera, sauf mention explicite, le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. p désignera un entier naturel non nul. On note $\mathscr{D}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On note pour tout $r \in [\![0, p]\!]$, $\mathscr{I}_r(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de rang inférieur ou égal à r et $\mathscr{S}_r(\mathbb{K})$ celui des matrices de rang supérieur strictement à r. On note $U_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, *unitaires*, *scindés* et de degré *égal* à p.
On notera χ l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}_p[X]$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \chi(A) = \chi_A$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ on considère l'endomorphisme Φ_A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) / AM = MA\}$$

Si $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$, <u>deux à deux distincts</u>, pour toute famille $(\mu_0, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$, on appelle polynôme d'interpolation aux abscisses $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ de valeurs $\mu_j, j \in [\![0, p]\!]$, l'unique polynôme $L \in \mathbb{K}_p[X]$ tel que $\forall j \in [\![0, p]\!], L(\lambda_j) = \mu_j$. Si pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, on note L_i le polynôme d'interpolation aux abscisses $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ de valeurs $\delta_{i,j}, 0 \leq j \leq p$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronnecker, alors les polynômes $L_i, 0 \leq i \leq p$ sont appelés les polynômes d'interpolation élémentaires aux abscisses $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Partie I

1. Montrer que pour tout scalaire λ, l'application d_λ définie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ par :

   $$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), d_\lambda(A) = \det(\lambda I_p - A),$$

   est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
2. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires quelconques *deux à deux distincts*. On note $L_0, L_1 \cdots L_p$ les polynômes d'interpolation élémentaires aux abscisses $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.
   (a) Exprimer polynôme L_i sous forme factorisée en facteurs de degrés 1 et montrer $(L_0, L_1 \cdots L_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.
   (b) Exprimer pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le polynôme χ_A dans cette base.
   (c) En déduire que l'application χ est continue.
3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

(a) On suppose qu'il existe une suite de matrices $(A_n)_n$ toutes semblables à A qui converge vers 0. Montrer que A nilpotente.

(b) On suppose maintenant que A est nilpotente. Justifier que A est trigonalisable.
Soit $T = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ une matrice triangulaire supérieure semblable à A, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice diagonale $D_n = \mathrm{diag}\left(n, n^2, \cdots, n^p\right)$. Déterminer les coefficients de $D_n T D_n^{-1}$, et en déduire qu'il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers 0 .

(c) **Application :** Monter que si $p \geq 2$ alors il n'existe aucune norme $\|.\|$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \forall P \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K}), \quad \|PAP^{-1}\| = \|A\|.$$

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse aux propriétés topologiques de $\mathscr{D}_p(\mathbb{K})$ et on en donnera quelques applications. On démontre d'abords que $U_p(\mathbb{K})$ est un fermé. On pose pour tout polynôme

$$P = \alpha_p X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{K}_p[X]$$

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{p} |\alpha_k|$$

On admet que $\|.\|$ définit une norme de $\mathbb{K}_p[X]$

1. Soit $(P_n)_n$ une suite convergente de polynômes de $U_p(\mathbb{C})$, Montrer que sa limite est un polynôme unitaire de degré p. En déduire que $U_p(\mathbb{C})$ est un fermé.
2. Soient $P \in \mathbb{K}_p[X]$ un polynôme unitaire et $a \in \mathbb{K}$, on suppose que a est une racine de P. Montrer que $|a| \leqslant \|P\|$. (On distinguera les cas $|a| \leqslant 1$ et $|a| > 1$.)
3. Soit $(P_n)_n$ une suite convergente de polynômes de $U_p(\mathbb{R})$ de limite P. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{p,n}$ les racines (non forcément deux à deux distinctes) de P_n et on pose

$$X_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{p,n}).$$

   (a) Donner un exemple où la suite (X_n) est divergente.
   (b) Donner, dans le cas où $p = 2$, un exemple où les polynômes P_n sont tous scindés à racines simples mais P n'est pas à racines simples.
   (c) Montrer que la suite $(X_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence qu'on notera $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$.
   (d) Montrer que $P = \prod_{k=0}^{p} (X - y_k)$.
   (e) Déduire de ce qui précède que $U_p(\mathbb{R})$ est un fermé.
4. Soit $(A_n)_n$ une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer en utilisant l'application χ que $\lim_{n\to+\infty} A_n$ est une matrice trigonalisable.
5. Réciproquement, montrer que toutes matrice trigonalisable est la limite d'une suite de matrices diagonalisables à valeurs propres deux à deux distinctes.
6. En déduire que $\mathscr{D}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Quelle est l'adhérence de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$?
7. **Application :** *Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans* $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

   (a) Démontrer que si A est diagonalisable alors $\chi_A(A) = 0$
   (b) Utiliser la densité de $\mathscr{D}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour montrer qu'en général $\chi_A(A) = 0$.

Partie III

Soit $r \in [\![1, p]\!]$. On veut montrer dans cette partie que $\mathscr{I}_r(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Justifier rapidement ce résultat si $r = p$.
2. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$. Montrer que $\mathrm{rg}(v) < r$ si et seulement pour toute famille libre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_r)$ de $\mathbb{K}^p$, la famille $(v(\mathbf{e}_1), v(\mathbf{e}_2), \cdots, v(\mathbf{e}_r))$ est liée.
3. On suppose dans cette question que $r < p$. On se donne une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{I}_r(\mathbb{K})$ convergente de limite A. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A et pour tous $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'endomorphisme canoniquement associé à A_n.
   Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{r+1})$ une famille libre quelconque de $\mathbb{K}^p$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, r+1]\!]$, la suite $(u_n(\mathbf{e}_k))_n$ converge vers $u(\mathbf{e}_k)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n})$ telle que
   $$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_{k,n} u_n(\mathbf{e}_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} |\lambda_{k,n}| = 1$$
   (c) Montrer que la suite $(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n})_n$ admet au moins une valeur d'adhérence, qu'on notera $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1})$.
   (d) Montrer que :
   $$\sum_{k=1}^{r+1} \mu_k u(\mathbf{e}_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{r+1} |\mu_k| = 1$$
   et en déduire que $\mathrm{rg}\,(u) \leq r$.
   (e) Montrer que $\mathscr{I}_r(\mathbb{K})$ est un fermé.
4. Que peut-on dire de l'ensemble des matrices de rang inférieur strictement à r ?
   Montrer que $\mathscr{S}_r(\mathbb{K})$ est un ouvert.

Partie IV

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On voudrait dans cette partie montrer que A est diagonalisable si et seulement l'ensemble $\mathscr{A}$ des matrices semblable à A est un fermé.

1. On suppose que A est diagonalisable et on considère une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{A}$, convergente de limite B. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.
   (a) Justifier soigneusement que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, m]\!]$,
   $$\mathrm{rg}\,(A_n - \lambda_k I_p) = p - \alpha_k$$
   (b) En constatant que la suite $(A_n - \lambda_k I_p)_n$ converge vers $B - \lambda_k I_p$, que peut-on dire de $\mathrm{rg}\,(B - \lambda_k I_p)$
   (c) Montrer que B est diagonalisable et qu'elle est semblable à A.
   (d) Conclure.
2. On veut donner une autre démonstration de l'implication établie dans la question précédente.
   (a) Montrer que $\chi_B = \chi_A$.
   (b) Soit π_A le polynôme minimal de A. Montrer que application $\pi : M \longmapsto \pi_A(M)$, est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
   (c) Montrer que $\pi_A(B) = 0$ et en déduire que B est diagonalisable.
   (d) Montrer que B est semblable à A et conclure.

3. Pour l'implication réciproque, on suppose que A n'est pas diagonalisable et on considéré un matrice triangulaire supérieure T semblable à A.
   (a) Justifier l'existence de T et expliquer pourquoi elle n'est pas diagonalisable.
   (b) En utilisant les matrices diagonales D_n introduites dans la question I-3-b. construire une suite de matrices semblables à T et qui converge vers une matrice diagonale.
   (c) Montrer alors que $\mathscr{A}$ n'est pas un fermé.

Partie V

On se donne dans cette partie une matrice trigonalisable $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et on se propose de montrer, en utilisant les résultats de la partie III, que :

$$\dim(\mathscr{C}(A)) \geq p.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est une sous algèbre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
2. (a) Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement elle est diagonale.
   (b) En déduire que si A est diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes, alors

$$\dim(\mathscr{C}(A)) = p.$$

3. On considère une suite de matrices diagonalisables $(A_n)_n$, à valeurs propres deux à deux distinctes qui converge vers A. Une telle suite existe d'après la question II-5.
   (a) Montrer que la suite d'endomorphismes $(\Phi_{A_n})_n$ converge vers Φ_A.
   (b) En déduire que $\dim(\mathscr{C}(A)) \geq p$.

Partie VI

On s'intéresse aux endomorphismes Φ_A, dans le cas où A est diagonalisable. Soit donc une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ (non forcément deux deux distinctes).

1. Soient $(V_1, V_2, \cdots, V_p)$ une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_p)$ une famille quelconque de vecteurs de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p} Y_k V_k^\top = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \quad Y_k = 0.$$

2. Montrer que si $(U_1, U_2, \cdots, U_p)$ et $(V_1, V_2, \cdots, V_p)$ sont des bases de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors la famille

$$\left((U_i V_j^\top)_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$$

   est une base de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
3. Justifier que la matrice $A^\top$ est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres que A et avec les mêmes multiplicités.
4. Soient $(U_1, U_2, \cdots, U_p)$ et $(V_1, V_2, \cdots, V_p)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et de $A^\top$, associés dans le même ordre aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$.
   (a) Calculer $\Phi_A(U_i V_j^\top)$.
   (b) En déduire que Φ_A est diagonalisable de valeurs propres les scalaires $\lambda_i - \lambda_j$ où $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$.
5. Montrer que $\dim(\mathscr{C}(A))$ est la somme des carrés des dimensions des sous-espaces propres de A.
6. Retrouver le résultat $\dim(\mathscr{C}(A)) \geq p$.