Partie I

1. On a $(f-ae)\circ(f-be) = f^2-(a+b).f+ab.e = a^2.p+b^2.q-(a+b)(a.p+b.q)+ab.e = a^2.p + b^2.q - a^2.p - b^2.q - ab.p - ab.q + ab.e = 0$ car $ab.e = ab.(p+q)$. Ainsi $(f-a.e)\circ(f-b.e) = 0$, donc le polynôme $P = (X-a)(X-b)$ est un polynôme annulateur de f et comme $a \neq b$, on peut dire que P est scindé à racines simples, annulateur de f donc f est diagonalisable.
2. (a) On a $f-a.e = a.p+b.q-a.(p+q) = (b-a).q$, de même on a $f-b.e = (a-b).p$, par suite de $(f-a.e)\circ(f-b.e) = 0$, on déduit $-(a-b)^2.(p\circ q) = 0$ et comme $a \neq b$, on a $p\circ q = 0$, et par symétrie des rôles on a aussi $q\circ p = 0$, donc finalement $p\circ q = q\circ p = 0$.

   On a $p+q = e$, donc $p^2 = p\circ(p+q) - p\circ q = p$, de même $q^2 = q$.

   (b) On a $\mathrm{Sp}(f) \subset \{a, b\}$ car $P = (X-a)(X-b)$ annule f et les racines de P sont a et b. Remarquons que $(f-a.e)\circ p = (a.p+b.q-a.e)\circ p = (b.q-a.(e-p))\circ p = (b-a).q\circ p = 0$, donc $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(f-a.e)$ et comme $p \neq 0$, on déduit que $\ker(f-a.e) \neq \{0\}$, donc $a \in \mathrm{Sp}(f)$, de même $b \in \mathrm{Sp}(f)$ car $(f-b.e)\circ q = 0$. Finalement on a $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

   (c) Comme $ab \neq 0$ et $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$, on a $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, donc f est bijectif.

   • Démarrage : On a $(a.p+b.q)^0 = e = a^0p + b^0q = p+q = e$.

   • Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $(a.p+b.q)^m = a^m.p + b^m.q$, alors, compte tenu de l'hypothèse de récurrence et le fait que $p\circ q = q\circ p = 0$, on a :

$$\begin{aligned}(a.p+b.q)^{m+1} &= (a^m.p+b^m.q)(a.p+b.q)\\ &= a^{m+1}.p+b^{m+1}.q+(a^mb+ab^m)p\circ q\\ &= a^{m+1}.p+b^{m+1}.q\end{aligned}$$

   Remarquons que $(\frac{1}{a}.p+\frac{1}{b}.q)\circ(a.p+b.q) = p+q = e = (a.p+b.q)\circ(\frac{1}{a}.p+\frac{1}{b}.q)$, par suite $(a.p+b.q)^{-1} = (\frac{1}{a}.p+\frac{1}{b}.q) = f^{-1}$. Comme f^{-1} satisfait les mêmes hypothèses que f, on peut dire que $\forall m \in \mathbb{N}, (f^{-1})^m = (\frac{1}{a})^m.p + \frac{1}{b})^m.q$, ce qui permet de conclure finalement que $\forall m \in \mathbb{Z}, f^m = a^m.p + b^m.q$
3. Soit $x \in \ker(f-a.e)$ alors $f(x) = a.x$. On a $\begin{cases} p(x)+q(x) = x \\ a.p(x)+b.q(x) = f(x) = a.x \end{cases}$, donc $b.p(x) - a.p(x) = ba - ax$, donc $(b-a).p(x) = (b-a).x$ et comme $a \neq b$, on a $p(x) = x$. Si $x \in \ker(f-be)$ on a $f(x) = bx$, donc de la même façon, on a : $\begin{cases} p(x)+q(x) = x \\ a.p(x)+b.q(x) = f(x) = b.x \end{cases}$, donc $(b-a).p(x) = (b-b).x = 0$, ainsi on a prouvé que $\forall x \in E, \begin{cases} x \in \ker(f-a.e) \Rightarrow p(x) = x \\ x \in \ker(f-b.e) \Rightarrow p(x) = 0 \end{cases}$, donc p est la projection sur $\ker(f-a.e)$ parallèlement à $\ker(f-b.e)$ et par symétrie des rôles q est la projection sur $\ker(f-b.e)$ parallèlement à $\ker(f-a.e)$.
4. On a posé $F = \{x.p + y.q/(x,y) \in \mathbb{C}^2\}$.

   (a) On démontre que :

   • F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$:

   • On a $e \in F$ car $e = p+q$.

   • Si $u, v \in F$ tel que $u = x.p+y.q$ et $v = x'.p+y'.q$ tel que $x, x', y, y' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $u+\lambda v = x.p+y.q+\lambda(x'.p+y'.q) = (x+\lambda x').p+(y+\lambda y').q$, donc $u+\lambda v \in F$.

   • De même $uv = (x.p+y.q)(x'.p+y'.q) = (xx')p^2+(xy').pq+(yx')qp+(yy')q^2$

et comme $p^2=p$ et $q^2=q$ et $pq=qp=0$, on a $uv=(xx'.p+(yy').q$, donc $uv\in F$.

• Il en découle que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

• On a $\dim(F)=2$ car, par définition (p,q) est une famille génératrice de F et elle est libre car sionon on aurait $q=\alpha p$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$, donc $\alpha p^2=pq=0$ donc $\lambda p=0$ et comme $p\neq 0$ on aurait $\alpha=0$ donc $q=0$ chose fausse.

(b) Soit $u=x.p+y.q\in F$, on a $u^2=x^2.p+y^2.q$, donc u est un projecteur si et seulement si $x^2=x$ et $y^2=y$, si et seulement si $x=0$ ou $x=1$ et $y=0$ ou $y=1$ si et seulement si $u\in\{0,e,p,q\}$, donc les seuls projecteurs de F sont $0,e,p,q$ et q.

(c) Soit $u=x.p+y.q\in F$, alors $u\in\mathcal{R}(f)$ si et seulement si $u^2=f$ si et seulement si $x^2.p+y^2.q=a.p+b.q$ si et seulement si $x^2=a$ et $y^2=b$. Deux cas sont possibles :

• Si $ab\neq 0$ admettent chacun deux racines carrées opposées $a',-a'$ pour a et $b',-b'$ pour b, donc $\mathcal{R}(f)\cap F=\{\pm a'.p\pm b'.q\}$.

• Si $b=0$ alors $\mathcal{R}(f)\cap F=\{\pm a'.p\}$.

• Si $a=0$ alors $\mathcal{R}(f)\cap F=\{\pm b'.q\}$.

5. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

(a) On a $J^0=I$. Démontrons par récurrence que $\forall m\in\mathbb{N}^*, J^m=3^{m-1}J$.

• Si $m=1$, c'est vrai que $3^{1-1}J=J=J^1$.

• Soit $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $J^m=3^{m-1}J$, alors $J^{m+1}=JJ^m=J(3^{m-1}J)=3^{m-1}J^2=3^{m-1}\times 3J=3^mJ$.

• On a $A^0=I$ et si $m\in\mathbb{N}^*$, la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $A^m=(I+J)^m=\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}J^k=I+\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}3^{k-1}\right)J=I+\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}3^{k-1}\right)J=I+\frac{4^m-1}{3}J$

(b) On remarque que pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a $A^m=1^mB+4^mC$ pour $B=I-\frac{1}{3}J$ et $C=\frac{1}{3}J$.

(c) Remarquons que $B^2=B$ et $C^2=C$ et $BC=CB=0$, donc pour tout $(\alpha,\beta)\in\{-1,1\}\times\{-2,2\}$, on a $(\alpha B+\beta C)^2=B+4C=A$, ce qui fournit les quatre matrices demandées.

Partie II

1. L'application $u:\mathbb{C}[X]\to\mathcal{L}(E); P\mapsto u(P)=P(f)-\sum\limits_{k=1}^{n}P(x_k)p_k$ est une application linéaire qui réalise $u(X^m)=0$ pour tout $m\in\mathbb{N}$, donc u s'annule sur la base canonique (X^m) de $\mathbb{C}[X]$, donc elle est nulle, par suite :

$$\forall P\in\mathbb{C}[X], P(f)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)p_k.$$

2. (a) On a $\Pi(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Pi(x_k)p_k=0$ car $\Pi(x_k)=0$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Il en découle que f est diagonalisable car Π est scindé à racines simples et annulateur de f.

(b) On $L_k(f)=\sum\limits_{j=1}^{n} L_k(x_j)p_j=\sum \delta_{k,j}p_j=\delta_{k,k}p_k=p_k$. On a :

$$\begin{aligned} p_k\circ p_\ell &= L_k(f)\circ L_\ell(f)\\ &= L_kL_\ell(f)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(L_kL_\ell)(x_j)p_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}L_k(x_j)L_\ell(x_j)p_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\delta_{k,j}\delta_{\ell,j}p_j\\ &= \delta_{k,k}\delta_{\ell,k}p_k=\delta_{\ell,k}p_k \end{aligned}$$

par suite $p_k\circ p_\ell=\begin{cases} p_k & \text{si} \quad k=\ell\\ 0 & \text{si} \quad k\neq \ell\end{cases}$

(c) On a $\mathrm{Sp}(f)\subset\{x_1,\ldots,x_n\}$ car $\Pi(f)=0$. Remarquons que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ on a $(f-x_je)\circ p_j=0$ car

$$f-x_je=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_j)p_k,$$

Donc :

$$\begin{aligned} (f-x_je)\circ p_j &= \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_j)p_k\circ p_j\\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_j)\delta_{k,j}p_j\\ &= (x_j-x_j)p_j=0 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Im}(p_j)\subset\ker(f-x_je)$, et comme $p_j\neq 0$, on a $\ker(f-x_je)\neq\{0\}$, par suite $x_j\in\mathrm{Sp}(f)$. Donc finalement $\mathrm{Sp}(f)=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

3. Soit $j\in[\![1,n]\!]$, pour tout $x\in F_j=\ker(f-x_je)$ on a $f(x)=x_jx$, donc $p_k(x)=L_k(f)(x)=L_k(x_j)x=\delta_{k,j}x$, donc $p_k(x)=x$ si $x\in F_k$ et $p_k(x)=0$ si $x\in F_j$ et $j\neq k$, donc $p_k(x)=0$ si $x\in\bigoplus\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}F_j=\widetilde{F_k}$ et alors p_k est la projection sur F_k parallèlement à $\widetilde{F_k}$

4. (a) Par définition la famille $(p_1,\ldots,p_n)$ est une famille génératrice de F, on va démontrer qu'elle est libre, si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_kp_k=0$, si $j\in[\![1,n]\!]$, on a $p_j\circ(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_kp_k)=0$, donc $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(p_j\circ p_k)=0$, et d'après la question II)2)b) on a $p_j\circ p_k=\delta_{j,k}p_j$, donc $\alpha_jp_j=0$, et comme $p_j\neq 0$ on a $\alpha_j=0$, la famille en question est libre et génératrice donc une base de F, donc $\dim(F)=n$.

(b) Soit g un élément de $\mathcal{R}(f)$ et écrivons $g = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k p_k$, donc $g^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2 p_k$ par suite $g \in \mathcal{R}(f) \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], t_k^2 = x_k$ et deux cas sont possibles :
• tous les x_k sont non nuls, donc si z_k est un nombre complexe tel que $z_k^2 = x_k$ on a :

$$\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k p_k / (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{-1, 1\}^n \right\},$$

par suite $\operatorname{card}(\mathcal{R}(f) \cap F) = 2^n$.
• l'un des x_k est nul, on peut choisir l'indexation de sorte que $x_1 = 0$, donc les x_k pour $k \in [\![2, n]\!]$ sont non nuls, donc :

$$\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k z_k p_k / (\varepsilon_k)_{2 \leq k \leq n} \in \{-1, 1\}^{n-1} \right\},$$

par suite $\operatorname{card}(\mathcal{R}(f) \cap F) = 2^{n-1}$.

(c) Soit g un élément de $\mathcal{R}(f)$ et écrivons $g = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k p_k$, donc $g^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2 p_k$ par suite g est un projecteur si et seulement si $g^2 = g$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!], t_k^2 = t_k$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!], t_k = 0$ ou $t_k = 1$. Donc l'ensembles des projecteurs de F est :

$$\mathscr{P} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k / (\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{0, 1\}^n \right\}.$$

Si $g \in \mathscr{P}$ et $g = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k$, tel que $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{0, 1\}^n$, on peut écrire

$$g = \sum_{k \in I} z_k p_k,$$

avec

$$I = \{k \in [\![1, n]\!] / \varepsilon_k = 1\}.$$

On peut donc dire que g est le projecteur sur $W = \bigoplus\limits_{k \in I} \operatorname{Im}(p_k)$ parallèlement à $V = \bigoplus\limits_{k \in I^c} \operatorname{Im}(p_k)$, où $I^c = [\![1, n]\!] \backslash I$.

5. On suppose que $n = N$

(a) Puisque $n = N$,les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles et si $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$ alors les sous-espaces propres E_k sont stables par g et sont des droites vectorielles, donc si $E_k = \mathbb{C} v_k$ on a la famille $g(v_k), v_k)$ est liée, donc il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $g(v_k) = \mu_k v_k$, par suite v_k est aussi un vecteur propre de g associé à μ_k. On a alors $g = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k p_k$ par suite $g \in F$. Réciproquement pour tout $g \in F$ tel que $g = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k p_k$ on a $f \circ g = g \circ f = \sum x_k y_k p_k$, donc $\forall g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \in F$.

(b) Remarquons que si $g \in \mathcal{R}(f)$ alors $g^2 = f$ donc $g \circ f = f \circ g = g^3$, par suite d'après la question ci-dessus, $g \in F$. Il en découle que $\mathcal{R}(f) \subset F$ donc $\operatorname{card}(\mathcal{R}(f)) = \operatorname{card}(\mathcal{R}(f) \cap F)$ et on a vu dans la question II)4)b) que ce cardinal est 2^N si les x_k sont tous non nuls et 2^{N-1} s'il existe un x_k nul.

6. Comme h est diagonalisable E est la somme directe des sous-espaces propres de h, si on note $E_k = \ker(h - x_k e)$ et q_k la projection sur E_k parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}$ alors on a $h = \sum_{k=1}^{n} x_k q_k$.

7. On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) On a $\chi_A = X(X^2-1)$, donc les valeurs propores de A sont
   $$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1.$$

   (b) On a $L_1 = \frac{X(X-1)}{2}$, $L_2 = 1 - X^2$, $L_2 = \frac{X(X+1)}{2}$, donc
   $$L_1(A) = \frac{1}{2}(A^2 - A), L_2(A) = I_3 - A^2, L_3(A) = \frac{1}{2}(A^2 + A).$$
   On a :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Il en découle que
   $$L_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, L_2(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
   et
   $$L_3(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) En vertu de $p_k = L_k(f)$, on a $P_1 = L_1(A), P_2 = L_2(A), P_3 = L_3(A)$, donc compte tenu de $n = N = 3$, on est dans les conditions de la question II.5) pour $n = N = 3$ et $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. On a $A = -1.P_1 + 0.P_2 + 1.P_2 = -1.P_1 + P_3$, donc les racines carrées de A sont de la forme $M = \pm iP_1 \pm P_3$, qui sont :
   $$M_1 = \begin{pmatrix} i+1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} i-1 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}$$
   $$M_3 = \begin{pmatrix} -i+1 & i & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ i & i & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -i-1 & i & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

Partie III

1. (a) Comme $u^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ convient(classique).

   (b) Le polynôme minimal de u est X^n.

(c) Supposons que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$, alors il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$, donc $v^{2n} = 0$ et $v^{2n-2} \neq 0$. Si $v^{2n-1} = 0$, il existe $x \in E$ tel que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq 2n-2}$ est libre et comme cette famille possède $2n-1$ vecteurs, on a $2n-1 \leq N$, donc $n \leq \frac{N+1}{2}$. Si $v^{2n-1} \neq 0$, on a $2n \leq N$, donc $n \leq \frac{N+1}{2}$, aussi dans ce cas.

2. (a) On a le développement en série entière : $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ avec, pour tout entier naturel non nul n :

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k \right) = \frac{(-1)^n}{2n!} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

Il en découle que $\alpha_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2n!} \prod\limits_{k=1}^{n-1} (2k-1) = \frac{(-1)^n (2n-2)!}{n 2^n ((n-1)!)^2}$.

En résumé on a :

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{(-1)^n (2n-2)!}{n 2^n ((n-1)!)^2}.$$

(b) On a $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$. On sait que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n) = P_n(x) + x^n \gamma(x)$ avec γ une fonction bornée sur un segment $[-\eta, \eta]$ avec $\eta > 0$. En élevant au carré on a

$$\forall x \in I_\eta, 1 + x = P_n^2(x) + 2x^n P_n(x) \gamma(x) + x^{2n} \gamma^2(x),$$

donc

$$(\star) \quad \forall x \in I_\eta, \quad P_n^2(x) - x - 1 = -x^n (2P_n(x)\gamma(x) + x^n \gamma^2(x)).$$

La division eu euclidienne de $Q(X) = P_n^2(X) - X - 1$ par X^n s'écrit $Q(X) = X^n Q_1(X) + R(X)$ avec $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, donc $(\star)$ ci dessus s'écrit :

$$\forall x \in I_\eta, \quad x^n Q_1(x) + R(x) = -x^n (2P_n(x)\gamma(x) + x^n \gamma^2(x)).$$

Il en découle que

$$\forall x \in I_\eta \backslash \{0\}, \quad \frac{R(x)}{x^n} = -Q_1(x) - 2P_n(x)\gamma(x) + \gamma^2(x),$$

donc l'application $x \mapsto \frac{R(x)}{x^n}$ est bornée sur $I_\eta \backslash \{0\}$, et comme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ on a forcément $R = 0$, donc $X^n | P_n^2(X) - X - 1$.

3. (a) On a $\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$. Supposons que $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$, alors il existe un polynôme U tel que $Q^2 - X - \omega^2 = X^n U(X)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + \omega^2 = Q^2(x) + x^n U(x)$, donc

$$(\star) \quad Q^2(x) = x + \omega^2 + x^n U(x)$$

or au voisinage de 0, on a :

$$\omega \sqrt{1 + \frac{x}{\omega^2}} = \omega P_n \left(\frac{x}{\omega^2} \right) + O(x^n) = Q_{n,\omega}(x) + O(x^n).$$

donc $Q_{n,\omega}(x) = \omega\sqrt{1 + \frac{x}{\omega^2}} + O(x^n)$, ce qui fournit

$$(\star)' \quad Q_{n,\omega}^2(x) = x + \omega^2 + O(x^n)$$

Comme $x^n U(x) = O(x^n)$ au voisinage de 0, on a en vertu de l'unicité du développent limité $Q^2 = Q_{n,\omega}^2$, ce qui fournit la réponse désirée.

(b) On a $X^n | Q$, donc $X^n | Q_{n,\omega} - X - \omega^2$ et comme $u^n = 0$, on a $(Q_{n,\omega}(u))^2 - u - \omega^2 e = 0$, donc $u + \omega^2 e = v^2$ où $v = Q_{n,\omega}(u)$. Il en découle que $v \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e)$, donc $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) \neq \emptyset$.

4. On suppose que $n = N$, soit $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit libre et $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 e)$.

   (a) On a $g^2 = u + \omega^2 e$, donc $u = g - \omega^2 e$, donc $u \circ g = g \circ u = g^2 - \omega^2 g$.

   (b) Comme la famille $\mathscr{F}_x$ ci-dessus est une base de E il existe $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$ tel que $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x)$, donc $g(x) = (P(u))(x)$ avec $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, on voit bien que $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

   • Pour prouver que $g = P(u)$, il suffit de prouver que g et $P(u)$ coincident sur la base $\mathscr{F}_x$ ci-dessus, et c'est le cas puisque $g(x) = P(u)(x)$ et de $u \circ g = g \circ u$, on déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $g \circ u^k = u^k \circ g$, par suite $g(u^k(x)) = u^k(g(x)) = u^k(P(u)(x))$ et comme $u^k \circ P(u) = P(u) \circ u^k$, on a $g(u^k(x)) = P(u)(u^k(x))$, ce qui termine la preuve de $g = P(u)$.

   (c) D'après la question précédente si $g \in \mathcal{R}(u)$, il est de la forme $g = P(u)$ avec $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, donc $(P(u))^2 = u + \omega^2 e$. Donc $P^2 - X - \omega^2$ est un polynôme annulateur de u, et comme $n = N = \dim(E)$, le polynôme minimal de u est $X^N = X^n$, donc $X^n | P^2 - X - \omega^2$, et d'après la question 3)a) de cette partie, on a $P \in \{\pm Q_{n,\omega}\}$.

5. On a $A = I + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $J^4 = 0$ et $J^3 \neq 0$, donc si on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A on a $f = u + 2e = 2(e + \frac{1}{2}u)$. En posant $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $u = \frac{1}{2}v$, on est dans les conditions de la question 4) ci dessus, on a $P_4 = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)X^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)X^3$, donc $P_4 = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16}$. On a

$$Q_\omega\left(\frac{X}{\omega^2}\right) = Q_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2X) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{4}X^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}X^3,$$

ce qui fournit :

$$M = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Comme $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$ il existe $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que $v^2 = u$, forcément v est nilpotent, donc il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v) = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure stricte, donc $[T]_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$. On a $T \times E_{1,n} = E_{1,n} \times T = 0$ puisque $T \times E_{1,n} = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} [T]_{i,j} E_{i,j} \times E_{1,n} =$

$\sum_{1\leq i,j\leq n}[T]_{i,j}\delta_{1,j}E_{i,n}$, or si $j=1$ alors $[T]_{i,j}=0$ et si $j\neq 1$ alors $\delta_{1,j}=0$. De même $E_{1,n}\times T=\sum_{1\leq i,j\leq n}[T]_{i,j}E_{i,n}E_{i,j}=\sum_{1\leq i,j\leq n}[T]_{i,j}\delta_{i,n}E_{i,j}$ et comme en haut, si $n=i$ alors $[T]_{i,j}=[T]_{n,i}=0$ et si $n\neq i$ alors $\delta_{n,i}0$. On a aussi $E_{1,n}^2=0$, par suite pour tout nombre complexe λ, on a $(T+\lambda E_{1,n}^2=T^2$ donc si on note v_0 l'endomorphisme tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v_0)=E_{1,n}$ alors

$$\forall\lambda\in\mathbb{C},(v+\lambda v_0)^2=u,$$

et comme $v_0\neq 0$, l'ensemble $v+\mathbb{C}v_0$ est infini contenu dans $\mathcal{R}(u)$, donc $\mathcal{R}(u)$ est infini.

7. On donne $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

   (a) Une matrice $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\u&v&w\end{pmatrix}$ commute avec A si et seulement si $AM=MA$ si et seulement si $\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0&0\\y&0&0\\v&0&0\end{pmatrix}$ si et seulement si $b=c=v=0$ et $a=y$ si et seulement si $M=\begin{pmatrix}a&0&0\\x&a&z\\u&0&w\end{pmatrix}$, avec $(a,x,z,u,w)\in\mathbb{C}^5$

   (b) Si M est une racine carrée de A alors M commute avec A donc elle est de la forme précédente dans la question ci-dessus, donc $M=\begin{pmatrix}a&0&0\\x&a&z\\u&0&w\end{pmatrix}$, avec $(a,x,z,u,w)\in\mathbb{C}^5$, donc $M^2=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\2ax+zu&xa&az+zw\\ua+wu&0&w^2\end{pmatrix}$ donc $M^2=A$ si et seulement si $a=w=0$ et $zu=1$ si et seulement si $M=\begin{pmatrix}0&0&0\\x&0&z\\z^{-1}&0&0\end{pmatrix}$ avec $x\in\mathbb{C}$ et $z\in\mathbb{C}^*$

Partie IV

1. (a) C'est le polynôme minimal de f.

   (b) Puisque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, le polynôme minimal Φ_f de f est scindé donc, compte tenu du fait que $\Phi_f|P_f$, il s'écrit : $\Phi_f=\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)^{\beta_k}$ avec pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\beta_k\in\mathbb{N}$ et $1\leq\beta_k\leq\alpha_k$ (cette dernière inégalité est une conséquence de $\Phi_f|P_f$.

2. Puisque $g^2=f$, on a $g\circ f=f\circ g$ donc g et $f-x_ke$ commutent pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, donc $E_k=\ker(f-x_ke)$ est stable par g, donc $g(E_k)\subset E_k$.

3. (a) Supposons que $x_1=0$ et $\beta_1>\frac{\alpha_1+1}{2}$, alors $0\in\mathrm{Sp}(f)$ et $E_1=\ker(f^{\alpha_1})$ est stable par f et f induit un endomorphisme f_1 de E_1 nilpotent d'indice de nilpotence β_1 et comme $\dim(E_1)=\alpha_1$. Si on suppose que $\mathcal{R}(f)\neq\emptyset$, il existe

$g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$, comme g et f commutent, on a E_1 est stable par g et l'endomorphisme induit g_1 réalise $g_1^2 = f_1$, en appliquant la question III)1)c), si $\mathcal{R}(f_1) \neq \emptyset$ alors $\beta_1 \leq \frac{\alpha_1+1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse $\beta_1 > \frac{\alpha_1+1}{2}$, donc $\mathcal{R}(f) = \emptyset$.

(b) Supposons que $0 \notin \ker(f)$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $x_k \neq 0$, donc $x_k \in \mathbb{C}^*$, donc il existe $\omega_k \in \mathbb{C}^*$ tel que $x_k = \omega_k^2$. Le sous-espace E_k est stable par f et f induit sur E_k un endomorphisme f_k tel que $f_k - x_k.e = u_k$ est nilpotent, donc, en vertu du III)3)b), $f_k = u_k + \omega_k^2 e$ réalise $\mathcal{R}(f_k) \neq \emptyset$, donc il existe $g_k \in \mathcal{L}(E_k)$ tel que $g_k^2 = f_k$. Si on note $g = g_1 \oplus \cdots \oplus g_n$, l'endomorphisme défini par $\forall x \in E, g(x) = g_k(p_k(x))$ où p_k est la projection sur E_k parallèlement à $V_k = \bigoplus\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} E_j$, on a $g^2 = f$ donc $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

(c) Supposons que $x_1 = 0$ et $\alpha_1 \geq 2$. Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ on en déduit que si f_1 est l'endomorphisme induit par f sur E_1 alors $\mathcal{R}(f_1) \neq \emptyset$ et comme $\dim(E_1) = \alpha_1 \geq 2$, on déduit en vertu de la question III)7)b) que $\mathcal{R}(f_1)$ est infini. Par ailleurs $F = \bigoplus_{k=2}^{n} E_k$ est stable par f et l'endomorphisme induit f' vérifie $0 \notin \mathrm{Sp}(f')$ donc d'après IV)3)b) on a $\mathcal{R}(f') \neq \emptyset$, fixons donc $g' \in \mathcal{L}(E')$ tel que $g'^2 = f'$ alors pour tout $g_1 \in \mathcal{R}(f_1)$, on a $g = g_1 \oplus g' \in \mathcal{R}(f)$, donc $\mathcal{R}(f)$ est infini.

4. (a) Puisque $\alpha_k = \beta_k$, l'endomorphisme f_k est nilpotent d'indice de nilpotence $\alpha_k = \dim(E_k)$, on est dans les condition du III)4), en particulier $\mathrm{card}(\mathcal{R}(f_k)) = 2$, par suite compte tenu que si on pose $\mathcal{R}(f_k) = \{\pm g_k\}$ la forme générale des éléments de $\mathcal{R}(f)$ est $\pm g_1 \cdots \pm g_n$, donc $\mathrm{card}(\mathcal{R}(f)) = 2^n$.

(b) Si $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$ alors $\dim(\ker(f)) = 1$ et si on note f' l'endomorphisme induit par f sur E', les valeurs propres de f' sont en nombre de $n-1$ à savoir $x_2, \ldots, x_n$ et elles sont toutes non nulles et on a toujours $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Un endomorphisme g de E réalise $g^2 = f$ si et seulement si $g'^2 = f'$, et comme E' est dans les conditions du IV)4)a), on a $\mathrm{card}(\mathcal{R}(f)) = \mathrm{card}(\mathcal{R}(f')) = 2^{n-1}$