Centre Salmane El Farissi
CPGE , Salé
MP2

DL 4
Donné le : 12-11-2025
Á rendre le : 19-11-2025

2025/2026
trimestre 1

Dans tout ce problème :

- n et N sont deux entiers naturels non nuls.
- E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E. On note 0 l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité.
- $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Étant donné $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ on désigne par $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f. par $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble $\left\{g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid g^2 = f\right\}$ et par $P(f)$ l'endomorphisme de E définie par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot f^k$ $\left(\text{avec la convention } f^0 = e\right)$.
- F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'endomorphisme $p_{F,G}$, de E tel que :

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad p_{F,G}(x + y) = x.$$

- On notera $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Partie I

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$a \neq b \text{ et } \begin{cases} e = p + q \\ f = a \cdot p + b \cdot q \\ f^2 = a^2 \cdot p + b^2 \cdot q. \end{cases}$$

1. Calculer $(f - a \cdot e) \circ (f - b \cdot e)$. En déduire que f est diagonalisable.
2. a. Établir que : $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p^2 = p$ et $q^2 = q$.
   b. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.
   c. On suppose que $ab \neq 0$. Démontrer que f est bijective et que :
   $$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f^m = a^m \cdot p + b^m \cdot q.$$
3. Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - a \cdot e)$ parallèlement à Ker $(f - b \cdot e)$ et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - b \cdot e)$ parallèlement a $\mathrm{Ker}(f - a \cdot e)$.
4. On pose $F = \left\{x \cdot p + y \cdot q \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\right\}$.
   (a) Démontrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.
   (b) Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.
   (c) Determiner $\mathcal{R}(f) \cap F$.
5. Exemple : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire A^m en fonction de I et J.

(b) Démontrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B,C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{C}))^2$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad A^m = a^m B + b^m C.$$

(c) Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

Partie II

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_2$, n endomorphismes non nuls de E,
$x_1, x_2, \ldots, x_n$, n nombres complexes distincts,
et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(f) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) p_k$
2. On pose
$$\Pi = \prod_{n=1}^{n} (X - x_k) \text{ et } \forall \ell \in \mathbb{N}_n, \Pi_\ell = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \neq \ell}} (X - x_k) \text{ et } L_\ell = \frac{\Pi_\ell}{\Pi_\ell(x_\ell)}$$
   (a) Calculer $\Pi(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?
   (b) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}_n \quad p_k = L_k(f)$.
   Vérifier que :
$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}_n^2 \quad p_k \circ p_\ell = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq \ell, \\ p_k \text{ si } k = \ell. \end{cases}$$
   (c) Démontrer que :
$$\mathrm{Sp}(f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
3. Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}_n$, p_k est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f - x_k \cdot e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{1 \le \ell \le n \\ \ell \neq k}} \mathrm{Ker}\,(f - x_\ell \cdot e)$.
4. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
   (a) Quelle est la dimension de F ?
   (b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f) \cap F$.
   (c) Quels sont les projecteurs qui sont déments de F ?
   [On précisera le nombre de ces projecteurs et les éléments caractéristiques de chaque projecteur.]
5. On suppose $n = N$.
   (a) Démontrer que $(\forall g \in \mathcal{L}(E)), \quad g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \in F$.
   (b) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f)$.
6. Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que :
$$\mathrm{Sp}(h) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$
   Démontrer qu'il existe n endomorphismes non nuls de E, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tel que $\forall m \in \mathbb{N} \quad h^m = \sum_{h=1}^{n} x_k^m \cdot q_k$.

7. Exemple : On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2 et x_3 de A tel que $x_1 < x_2 < x_3$.
   (b) Calculer L_1, L_2, L_3 et les coefficients des matrices :
   $$A_1 = L_1(A) \quad A_2 = L_2(A) \text{ et } A_3 = L_3(A).$$
   (c) Déterminer en fonction de A_1, A_2 et A_3 toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

Partie III

Soit u un endomorphisme u de E tel que :

$$u^n = 0 \text{ et } u^{n-1} \neq 0.$$

1. (a) Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ soit libre.
   (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Etablir que $(P(u) = 0 \Leftrightarrow X^n$ divise $P)$.
   (c) Démontrer que : $\mathcal{R}(u) \neq \varnothing \Rightarrow n \leqslant \frac{N+1}{2}$.
2. (a) Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité d'ordre n, au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est
   $$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$
   (b) On pose : $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Démontrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$. On prend dans la suite du problème $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on pose :
   $$Q_{n,\omega} = \omega P_n\left(\frac{X}{\omega^2}\right)$$
3. (a) Démontrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise le polynôme $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.
   (b) Établir que $\mathcal{R}\left(u + \omega^2 \cdot e\right) \neq \varnothing$
4. On suppose que $n = N$ et on prend $x \in E$ tel que la famille $\big(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ soit libre. On suppose que $g \in \mathcal{R}(u + \omega^2 \cdot e)$.
   (a) Démontrer que g commute avec u.
   (b) Prouver qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = P(u)(x)$. Établir que $g = \mathrm{P}(u)$.
   (c) Démontrer que : $\mathcal{R}\left(u + \omega^2 \cdot e\right) = \{Q_{n.\omega}(u), -Q_{n.\omega}(u)\}$.
5. Application : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   Déterminer toutes les matrices M telles que $M^2 = \mathrm{A}$.
6. On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \varnothing$. Démontrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.
7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer les matrices qui commutent avec A.

(b) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

Partie IV

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$P_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\alpha_k}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les valeurs propres distinctes de f et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs. On pose $E_k = \mathrm{Ker}((f - x_k \cdot e)^{\alpha_k})$ et on rappelle que $\underbrace{\bigoplus}_{1 \leq k \leq n} E_k = E$.

1. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Φ_f, de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que :
$$\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(f) = 0\} = \{\Phi_f Q \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$
   (b) Démontrer que Φ_f, s'écrit :
$$\Phi_f(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - x_k)^{\beta_k} \quad \text{avec} \quad \forall k \in \mathbb{N}_n \quad 1 < \beta_k \leqslant \alpha_k$$

2. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$. Montrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad g\left(E_k\right) \subset E_k.$$

3. Etablir :
   (a) $\left[x_1 = 0 \text{ et } \beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2}\right] \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \varnothing$.
   (b) $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Rightarrow \mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.
   (c) Démontrer que dans le cas où $x_1 = 0$ et $\alpha_1 \geqslant 2$: on a
$$(\mathcal{R}(f) = \varnothing) \text{ ou } (Q(f) \text{ possède une infinité d'éléments })$$

4. On suppose que :
$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad \alpha_k = \beta_k.$$
   (a) Démontrer que si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors $\mathrm{card}(\mathcal{R}(f)) = 2^n$.
   (b) On suppose $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$. Démontrer que $\mathrm{card}(\mathcal{R}(f)) = 2^{n-1}$.