Partie 1 : Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k = \operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

1. Le noyau etl'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
• Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{N}_k$. On a $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathcal{N}_{k+1}$. D'où $\boxed{\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}}$.
• Soit $y \in \mathcal{I}_{k+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Pour $a = f(x) \in E$ on a alors $f^k(a) = f^{k+1}(x) = y$ et donc $y \in \mathcal{I}_k$. Ainsi $\boxed{\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$ implique $\dim \mathcal{N}_k \leq \dim \mathcal{N}_{k+1}$ donc la suite $(\dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

• Comme $(\dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels croissante et majorée par n, celle-ci est nécessairement constante à partir d'un certain rang $k_0 \leq n$.
• Soit $A = \{k \in [\![0; n]\!] \mid \dim \mathcal{N}_k = \dim \mathcal{N}_{k+1}\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle possède un plus petit élément q.
On a $\mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{q+1}$ et $q \in A$ donc dim $\mathcal{N}_q =$ dim $\mathcal{N}_{q+1}$ par suite $\boxed{\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}}$.

3. On a $\mathcal{I}_{q+1} \subset \mathcal{I}_q$ et dim $\mathcal{I}_a = n -$ dim $\mathcal{N}_q = n -$ dim $\mathcal{N}_{q+1} =$ dim $\mathcal{I}_{q+1}$ donc $\boxed{\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}}$.

4. Soit $x \in \mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f^{\,q}(a)$ et $f^{\,q}(x) = 0$ donc $f^{q+1}(a) = 0$ d'où $a \in \mathcal{N}_{q+1} = \mathcal{N}_q$ par suite $x = f^{\,q}(a) = 0$. Ainsi $\mathcal{N}_q \cap \mathcal{I}_q = \{0\}$. De plus, par le théorème du rang : dim $\mathcal{N}_q +$ dim $\mathcal{I}_q = \dim E$ donc $\boxed{\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E}$.

5. Pour tout entier naturel k, $\mathcal{I}_k$ est un sous espace stable de E soit $\varphi_k = f_{|\mathcal{I}_k} \in \mathcal{L}(\mathcal{I}_k)$.

a) Le théorème du rang donne $\dim \mathcal{I}_k = \dim \operatorname{Ker}(\varphi_k) + \dim \operatorname{Im}(\varphi_k)$.
On a :
• $\operatorname{Im}(\varphi_k) = \varphi_k(\mathcal{I}_k) = f(\mathcal{I}_k) = \mathcal{I}_{k+1}$.

• $\operatorname{Ker}(\varphi_k) = \{x \in \mathcal{I}_k \mid \varphi_k(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{I}_k \mid f(x) = 0\}$ donc $\operatorname{Ker}(\varphi_k) = \mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f)$.
Ainsi $\dim \mathcal{I}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f)) + \dim \mathcal{I}_{k+1}$ qui s'écrit $\boxed{\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))}$

b) Par le théorème du rang on a

$$(n - \dim \mathcal{N}_k) - (n - \dim \mathcal{N}_{k+1}) = \dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k = \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))$$

On sait que $\mathcal{I}_{k+1} \subset \mathcal{I}_k$ donc $\dim(\mathcal{I}_{k+1} \cap \operatorname{Ker}(f)) \leq \dim(\mathcal{I}_k \cap \operatorname{Ker}(f))$, par suite on a

$$\dim \mathcal{N}_{k+2} - \dim \mathcal{N}_{k+1} \leq \dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k$$

Donc la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\operatorname{Im}(u^r)$.

a) On a $\mathrm{Im}(v) = v(\mathrm{Im}\,(u^r)) = u^s(\mathrm{Im}\,(u^r)) = \mathrm{Im}\,(u^{s+r})$.

b) On a $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}\,(u^r) \cap \mathrm{Ker}\,(u^s) \subset \mathrm{Ker}\,(u^s)$.

c) De la question a) on a $\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim \mathrm{Im}(u^{s+r})$, le théorème du rang donne :

$$\dim \mathrm{Im}(u^{s+r}) + \dim \mathrm{Ker}(u^{s+r}) = n \text{ et } \dim \mathrm{Im}(v) + \dim \mathrm{Ker}(v) = \dim \mathrm{Im}(u^r)$$

donc

$$n - \dim \mathrm{Ker}(u^{s+r}) = \dim \mathrm{Im}(u^r) - \dim \mathrm{Ker}(v)$$

comme $\dim \mathrm{Im}(u^r) = n-$ dim (Ker (u^r)) alors

$$\dim \mathrm{Ker}(u^{s+r}) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^r)) + \dim \mathrm{Ker}(v)$$

$\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}\,(u^s)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(v) \leq \dim \mathrm{Ker}\,(u^s)$ ainsi $\boxed{\dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^{r+s})) \leq \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u^r)) + \dim\,(}$

d) On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

• Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

• Hérédité : soit $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i.

La question précédente indique que

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$$

Comme u est de rang $n-1$ alors $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1et l'hypothèse de récurrence donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) \leq i + 1$$

ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

Si $i \geq n+1$ le résultat est évident . Ainsi pour tout i dans $\mathbb{N}$, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) \leq i}$.

2. a) On a $U^n = 0$, donc $u^n = 0$ et $u^i = 0$ $\forall i \geq n$ par suite $\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = n \quad \forall i \geq n$.

On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

• Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$.

• Hérédité : soit $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i.

D'après la partie 1 la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^i)))_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante , donc

$$i = \dim(\mathrm{Ker}(u^i)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) \leq i + 1$$

Si $\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) < i + 1$ alors forcement

$$\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1}))$$

par suite $\mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

Remarquons que si $x \in \mathrm{Ker}(u^{i+2})$ alors $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{i+1}) = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $u^{i+1}(x) = 0$ donc

$x \in \mathrm{Ker}(u^{i+1})$, ainsi $\mathrm{Ker}(u^{i+2}) \subset \mathrm{Ker}(u^{i+1})$ d'où $\mathrm{Ker}(u^{i+2}) = \mathrm{Ker}(u^{i+1})$.

Par récurrence on a donc $\mathrm{Ker}(u^i) = \mathrm{Ker}(u^{i+1}) = ... = \mathrm{Ker}(u^n) = E$ ce qui est absurde .

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^{i+1})) = i + 1$. D'où le résultat pour $i+1$.

Ainsi on a $\forall i \in [\![0; n]\!]$, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = i}$.

b) Soit i dans $[\![0; n-1]\!]$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u^i)) = i$, donc $u^i \neq 0$.

Ainsi on a $u^n = 0$ et pour tout $i \leq n-1$ $u^i \neq 0$ donc l'indice de nilpotence de u est égal à n.

c) On a $u^{n-1} \neq 0$, il existe donc $e \in E \backslash \{0\}$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$.
Montrons que $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que

$$\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(e) = 0$$

En composant par u^{n-1}, on a alors

$$\alpha_0 u^{n-1}(e) + \alpha_1 u^n(e) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{2n-2}(e) = 0$$

Puisque $u^k = 0$ pour tout $k \geq n$ alors $\alpha_0 u^{n-1}(e) = 0$ ainsi $\alpha_0 = 0$.
A chaque fois on compose par $u^{n-2}, u^{n-3}, ..., u$, on obtient par un processus récurrent $\alpha_1 = \alpha_{21} = ... = \alpha_{n-1} = 0$.
La famille $\mathcal{B}_e$ est donc libre et possède $n = \dim(E)$ éléments donc c'est une base de E.

d) La matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$ est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Soit A et B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$, posons f_A et f_B les endomorphismes de E canoniquement associé à A et B , il existe donc deux bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_{e'}$ de E dans lesquelles les matrices de f_A et def_B sont identiques à la matrice de la question d) , ce qui prouve que A et B sont semblables .

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

1. Soit $1 \leq k \leq p$, on sait que $f \circ (f - \lambda_k)^{m_k} = (f - \lambda_k)^{m_k} \circ f$ donc $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$ est stable par f .

2. Les p polynômes $(\lambda_k - X)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux, on déduit par le théorème de décomposition des noyaux, que

$$\mathrm{Ker} \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k \mathrm{id}_E - f)^{m_k} = \mathrm{Ker}\left((\lambda_1 \mathrm{id}_E - f)^{m_1}\ \right) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\left((\lambda_p \mathrm{id}_E - f)^{m_p}\ \right)$$

et d'après le théorème de Cayley Hamilton on a $\mathrm{Ker} \prod\limits_{k=1}^{p} (\lambda_k \mathrm{id}_E - f)^{m_k} = \mathrm{Ker}(\chi_f(f)) = E$.
Ainsi on a $\boxed{E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p}$.

3. Pour tout entier $k \in [\![0, p]\!]$, posons $\varphi_k = f_{|F_k} - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} \in \mathcal{L}(F_k)$, on a pour tout $x \in F_k, \varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

a) Soit $k \in [\![0, p]\!]$, pour tout x dans F_k on a $\varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k}(x) = 0$ donc $\varphi_k^{m_k} = 0$ et φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .

b) Remarquons que $\varphi_k = f_{|F_k} - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ et $(X - \lambda_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de $f_{|F_k}$ donc
$Sp(f_{|F_k}) = \{\lambda_k\}$,on en déduit que $\chi_{f_{|F_k}}(X) = (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$.
F_k est un sous espace stable par f donc $\chi_{f_{|F_k}} | \chi_f$, ce qui donne $\dim F_k \leq m_k$.
Le degré du polynôme caractéristique χ_f est égale à $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ et on a aussi

$\dim F_1 + \dim F_2 + \ldots + \dim F_p = n$, si on suppose qu'il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $\dim F_i < m_i$ alors
$\dim F_1 + \ldots + \dim F_p < m_1 + \cdots + m_p$ ce qui est absurde , ainsi pour tout k dans $[\![1,p]\!]$ on a $\boxed{\dim F_k = m_k}$.

c) Montrons que $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$. Supposons par l'absurde que que $\varphi_k^{m_k-1} = 0$ et considérons le polynôme

$$Q(X) = (X - \lambda_k)^{m_k-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i} = \frac{\chi_f(X)}{\lambda_k - X}$$

On a

$$Q(f) = (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k-1} \circ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right)$$

Les polynômes d'un même endomorphisme commutent , donc pour tout $x \in F_k$ on a

$$Q(f)(x) = \left[\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right) \right] \left(\varphi_k^{m_k-1}(x) \ \right) = 0$$

et pour tout $x \in F_j$ avec $j \neq k$ on a

$$Q(f)(x) = \left[(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{m_k-1} \circ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k,\ i\neq j}}^{p} (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i} \right) \right] \left(\varphi_j^{m_j}(x) \ \right) = 0$$

Comme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, on a alors pour tout $x \in E$ il existe $(x_1, ..., x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tels que
$x = x_1 + ... + x_p$, donc $Q(f)(x) = Q(f)(x_1) + ... + Q(f)(x_p) = 0$.
Ainsi $Q(f) = 0$ avec Q de degré $n-1$, $Q(f)$ est donc une combinaison linéaire non nulle de $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ ce qui est contraire à l'hypotèse stipulant que $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est une partie libre. Donc $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$.
On en déduit que pour tout entier k dans $[\![1,p]\!]$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4. Pour tout entier k dans $[\![1,p]\!]$, $\varphi_k \in \mathcal{L}(F_k)$ est nilpotente d'ordre $m_k = \dim F_k$, d'après la partie 2 la matrice de
φ_k dans une base $\mathcal{B}_{e_k}$ de F_k est de la forme

$$Mat_{\mathcal{B}_{e_k}}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$$

comme $f_{|F_k} = \varphi_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ alors sa matrice dans la base $\mathcal{B}_{e_k}$ est de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{e_1} \cup \mathcal{B}_{e_2} \cup ... \cup \mathcal{B}_{e_p}$ la base de E adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(\ A_1, A_2, ...A_p)$.

Partie 4 : Cycles

1. Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un $p-$ cycle de f.

a) Pour tout entier k dans $[\![1, p-1]\!]$ on a $f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$, comme $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E alors $f^p(x) = x$ pour tout $x \in E$, ainsi $\boxed{f^p = \mathrm{id}_E}$.

b) E est de dimension n, par conséquent, une partie libre de E a au plus n éléments. De plus $x_0 \neq 0$ donc $1 \in F_{x_0}$.
Ainsi F_{x_0} est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ donc elle admet un maximum noté γ.

c) i) Montrons par récurrence que $\forall k \geq \gamma \quad f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
• $\gamma+1 \notin F_{x_0}$ donc $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0), f^{\gamma}(x_0))$ est liée, comme $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre alors $f^{\gamma}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$.
• Supposons que $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$, alors $f^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \cdots$
et comme $f^{\gamma}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ on a bien $f^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}($
Finalement pour tout entier $k \geq \gamma$, $\boxed{, f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0))}$.

ii) $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E et $\forall k \geq \gamma$, $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \ldots, f^{\gamma-1}(x_0))$, donc

$$E = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)) = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

comme $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{\gamma-1}(x_0))$ est libre alors c'est une base de E et $\dim E = n = \gamma$.

iii) D'après la question a) $f^p = \mathrm{id}_E$ avec $p = n = \gamma$, donc $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f , par suite le polynôme minimal π_f divise $X^n - 1$.
Posons $\pi_f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0$ avec $d \leq n$, on a alors $f^d(x_0) + a_{d-1}f^{d-1}(x_0) + ... + a_0 x_0 = 0$ donc la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^d(x_0))$ est liée, par suite $d+1 \notin F_{x_0}$ et forcement $d+1 > n$, ainsi $d = n$.
On sait que les valeurs propre de f sont exactement les racines de π_f , donc $Sp(f) = \left\{e^{2ik\pi}, k \in [\![1, n]\!]\right\}$ et f admet n valeurs propres distinctes .

a) Soit $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0) \ldots \ldots, f^{n-1}(x_0))$ un n-cycle de f , ce qui signifie $\mathcal{B}_{x_0}$ est une famille génératrice de E de cardinal $n = \dim E$ donc elle constitue une base de E.

b) On a $f(f^{j-1}(x_0)) = \begin{cases} f^j(x_0) \text{ si } 1 \leq j \leq n-2 \\ x_0 \text{ si } j = n-1 \end{cases}$, ce qui donne

$$G = Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a $GU_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \overline{\omega}^{k} U_k$. Donc U_k est un vecteur propre de G associé à la valeur propre $\overline{\omega}^{k}$.

2. Soit $M = (m_{k,\ell})_{1\le k,\ell \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $m_{k,\ell} = \overline{\omega}^{k\ell}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le n}$, où $\overline{m}_{k,\ell}$ est le conjugué de $m_{k,\ell}$.

a) Posons $M\,\overline{M} = (a_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le n}$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned} a_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^{n} m_{k,j}\overline{m}_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{kj}\omega^{j\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\omega^{\ell-k}\right)^{j} \end{aligned}$$

Si $\ell = k$ alors $a_{k,\ell} = n$ et si $\ell \neq k$ alors $a_{k,\ell} = \omega^{\ell-k}\dfrac{1-\left(\omega^{\ell-k}\right)^n}{1-\omega^{\ell-k}} = 0$ (car $\left(\omega^{\ell-k}\right)^n = (\omega^n)^{\ell-k} = 1$) .

On conclus que $\boxed{M\,\overline{M} = n\mathrm{I}_n}$.

b) Ainsi $M \in GL_n(C)$ et $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{M}}$.

3. Soit $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$

a) Remarquons que $G^2 = Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^2)$ et

$$Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de même pour tout $k \in [\![3, n-1]\!]$

$$G^k = Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^k) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \vdots \\ \leftarrow k \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow n \end{matrix} \end{array}$$

Nous avons alors $H = b_0 I_0 + b_1 G + ... + b_{n-1} G^{n-1}$.
Comme G admet n valeurs propres distinctes alors elle est diagonalisable, elle s'écrit de la forme $H = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale et P matrice inversible, par suite $G^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi H est semblable à la matrice diagonale : $b_0 I_0 + b_1 D + ... + b_{n-1} D^{n-1}$. H est donc diagonalisable .

b) D'après la question 1) on a $D = diag(\overline{\omega}, \overline{\omega}^2, ..., \overline{\omega}^n)$, si on pose $Q(X) = b_0 + b_1 X + ... + b_{n-1} X^{n-1}$alors H est semblable à la matrice $Q(D) = diag\left(Q\left(\overline{\omega}\right), Q\left(\overline{\omega}^2\right), ..., Q\left(\overline{\omega}^n\right)\right)$, ce qui donne $Sp(H) = \left\{Q\left(\overline{\omega}\right), Q\left(\overline{\omega}^2\right), ..., Q\left(\overline{\omega}^n\right)\right\}$ et on a $(U_1, ..., U_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

1. Une base de $\mathcal{T}$ est la famille $(E_{ij})_{i>j}$ qui est est de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$ donc $\boxed{\dim \mathcal{T} = \frac{n(n-1)}{2}}$.
2. Soit M une matrice nilpotente, donc $\pi_M(X) = X^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $Sp(M) = \{0\}$ et $\chi_M(X) = X^n$ qui est scindé , donc M est trigonalisable et elle est semblable à une matrice triangulaire de diagonale nulle .
3. On a $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T} = \{0\}$ donc la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{T}$ est directe et on a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ alors $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{T} = n^2$ ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}}$.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$, si on suppose que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) = 0$ alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et F sont en somme directe et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(F)$, on a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$et $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$ donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus F) > n^2$, ce qui est absurde . Ainsi $\boxed{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0}$.
5. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$, d'après la question 4) on a $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.
Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F$, M est symétrique et réelle donc diagonalisable et elle est nilpotente donc $Sp(M) = \{0\}$,on en déduit que $M = 0$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F = \{0\}$ ce qui est absurde.
Ainsi tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ vérifie $\dim(F) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Or $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ et $\dim(\mathcal{T}) = \frac{n(n-1)}{2}$, donc la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie 6 : L'équation $X^3 = X^2$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans toute cette partie on note $E = \mathbb{R}^3$.

1. Comme $M^3 = M^2$, on a aussi $u^3 = u = 2$, donc le polynôme $P = X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ est un polynôme scindé unitaire de degré 3 annulateur de u.
2. Le polynôme minimal π_u de u est un polynôme unitaire diviseur de P et comme $\deg(\pi_u) \geq 1$ les seules possibilité pour π_u sont les éléments de l'ensemble : $\{X, X^2, X-1, X(X-1), P\}$. Il en découle que $\pi_u \in \{X, X-1, X^2, X^2 - X, X^3 - X^2\}$.

3. Si on suppose $M \neq 0$ alors $\pi_u \neq X$ et si l'on suppose M non inversible, on exclu la polynôme $X-1$, donc si on ajoute M non nulle et non inversible on a $\pi_u \in \{X^2, X^2 - X, X^3 - X^2\}$.

4. Si $\pi_u = X^2 - X$ alors π_u est scindé à racines simples 0 et 1, donc u est diagonalisable représenté par une matrice diagonale Δ à coefficients diagonaux des 0 et des 1 tous présents dans la diagonale. Les cas possibles dépendent de la multiplicité de 0 par exemple, soit $m(0) = 1$, alors $\Delta = \operatorname{diag}(0,1,1) = M_3$ ou $m(0) = 2$, alors $\Delta = (0,0,1) = M_2$ donc M est semblable à l'une des matrices M_2 ou M_3.

5. a) Comme $\pi_u = X^2$, on a $u^2 = \theta$, donc $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ car pour tout $x \in \operatorname{Im}(u)$ il existe $y \in E$ tel que $u(y) = x$, donc $u(x) = u^2(y) = \theta(y) = 0$.

Il en découle que $\operatorname{rg}(u) \leq \dim(\operatorname{Ker}(u))$, et comme, par le théorème du rang on a $\operatorname{rg}(u) + \dim(\operatorname{Ker}(u)) = 3$, on a les possibilités $(0,3), (1,2)$ pour le couple $(\operatorname{rg}(u), \dim(\operatorname{Ker}(u))$, le cas $(0,3)$ est à exclure car $u \neq \theta$, il s'en suit que $\operatorname{rg}(u) = 1$ et $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 2$.

b) On a $u \notin \mathbf{GL}(E)$ donc $\operatorname{Ker}(u) \neq \{0\}$ donc $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u)$. On a $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^2) = E$. Si on suppose que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$, on aurait $\operatorname{Ker}(u) = E$, donc $u = \theta$, ce qui n'est pas le cas car $\pi_u = X^2$. Il en découle que $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}(u^2) = E$.

c) Comme $u \neq \theta$, il existe au moins $V_3 \in E$ tel que $u(V_3) \neq 0$. On pose $V_1 = u(V_3)$ comme $V_3 \neq 0$, on a si (V_1, V_3) est liée, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $V_1 = \alpha V_3$, donc on aurait $\alpha V_3 = u(V_3)$ donc $\alpha u(V_3) = u^2(V_3) = 0$ et $\alpha V_1 = 0$, donc $\alpha = 0$ et cela conduit à $V_1 = 0$, absurde, donc la famille (V_1, V_3) est libre.

d) La famille (V_1, V_3) est libre et $V_3 \in \operatorname{Ker}(u)$ car $u(V_3) = u^2(V_1) = 0$, et comme $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 2$, le théorème de la base incomplète garantie l'existence d'un vecteur $V_2 \in E$ tel que (V_2, V_3) est une base de $\operatorname{Ker}(u)$ et comme $V_1 \notin \operatorname{Ker}(u)$, la famille (V_1, V_2, V_3) est libre donc une base de E puisqu'elle possède trois vecteurs. On a $u(V_2) = 0$ par définition de V_2.

e) Si on note $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ la matrice de u relativement à $\mathscr{V}$ est $\operatorname{mat}_{\mathscr{V}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ M_1, il en découle que M est semblable à M_1.

6. On suppose $\pi_u = X^3 - X^2$.

a) On a π_u est scindé, donc u est trigonalisable et comme π_u n'est pas à racines simples alors u n'est pas diagonalisable.

b) Comme $X^3 - X^2 = \pi_u = X^2(X-1)$ et que $X^2 \wedge (X-1) = 1$, le lemme de décomposition des noyaux permet de dire que $E = \operatorname{Ker}(u^2) \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$. Comme $0 \in \operatorname{Sp}(u)$ on a u non injectif, donc $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u)$. Si on suppose que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$, la somme directe ci-dessus devient $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et u serait diagonalisable car E serait somme directe des sous-espaces propres de u. Il en découle que $\operatorname{Ker}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}(u^2)$. On a $\pi_u = X^2(X-1)$ donc $u^2 \neq 0$ car sinon on aurait $\pi_u | X^2$, ce qui n'est pas le cas, donc on a aussi $\operatorname{Ker}(u^2) \subsetneq E$. Finalement on a $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}(u^2) \subsetneq E$.

c) Si on note $d_k = \dim(\operatorname{Ker}(u^k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a en vertu de la question ci-dessus : $0 = d_0 < d_1 < d_2 < 3$, par suite $1 \leq d_1 < d_2 \leq 2$, la seule possibilité est $d_1 = 1$ et $d_2 = 2$.

Si on suppose que $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$, alors par le théorème du rang, on aurait $\operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u) = E$, soit alors $x \in \operatorname{Ker}(u^2)$ alors $u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u)$ donc $u(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker}(u)$, donc $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\} \Rightarrow \ker(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$ et comme $\operatorname{Ker}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}(u^2)$, on a $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) \neq \{0\}$, soit alors $V_1 \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$, donc $u(V_1) = 0$ et il existe $V_2 \in E$ tel que $u(V_2) = V_1$. Finalement comme $\pi_u(1) = 0$, on a $1 \in spec(u)$, soit V_3 un vecteur propre associé à 1 alors $u(V_3) = V_3$. Montrons que la famille

$\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est libre. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + {}_3 V_3 = 0$, comme $u(V_1) = 0$ et $u(V_2) = V_1$, on a en appliquant u à la relation (1) : $\alpha_2 V_1 + \alpha_3 V_3 = 0$, encore une fois $\alpha_3 V_3 = 0$, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ et $\mathscr{V}$ est une base de E.

d) On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{V}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_4$, par suite M est semblable à M_4.

7. L'équation $X^3 = X^2$ admet une solution triviale qui est 0, et si X est une solution inversible forcément $X = I_3$. Finalement si $X \neq 0$ et X non inversible l'étude ci-dessus montre que X est semblable à l'une des matrices M_1, M_2, M_3, M_4. Notons que les quatre matrices sont deux à deux non semblables(facile en utilisant le rang et la trace) donc elle représentent des classes de similitude différente. L'ensemble des solutions de l'équation en question est

$$\mathscr{C} = \{0, I_3, PM_1P^{-1}, PM_2P^{-1}, PM_3P^{-1}, PM_4P^{-1} / P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})\}$$