Centre Salmane El Farissi	DL 3	2025/2026
CPGE , Salé	Donné le : 29-10-2025	trimestre 1
MP2	Á rendre le : 7-11-2025	

Dans tout le problème $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}, GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0=\mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1}=f^k \circ f$ où Id_E désigne l'application identité de E. On note $\chi_f(X)=\det(X \;\; \mathrm{Id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que d'après la théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f)=0$ où 0 désigne l'application nulle de E.
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X)=\det\left(X \mathrm{I}_n-M\right)$.
On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p=0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Partie 1 : Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel $k, \mathcal{N}_k=\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $\mathcal{I}_k=\operatorname{Im}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite $\left(\mathcal{N}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $\left(\mathcal{I}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. En déduire que $\left(\dim \mathcal{N}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $d_k=\dim(\mathcal{N}_k)$.

- **a)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(N_{k+1}) \subset N_k \subset N_{k+1}$
- **b)** En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_k \leq d_{k+1} \leq d_k+d_1$.

4. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q=\mathcal{N}_{q+1}$. Prouver alors qu'on a aussi $\mathcal{I}_q=\mathcal{I}_{q+1}$.

5. Montrer que l'on a :

- **a)** $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq q \Rightarrow \mathcal{N}_k=\mathcal{N}_q$.
- **b)** $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q=E$,

6. On considère pour tout entier naturel k, φ_k la restriction de f a $\mathcal{I}_k$.

- **a)** Montrer que $\dim \mathcal{I}_k-\dim \mathcal{I}_{k+1}=\dim\left(\operatorname{Ker}(f\;) \cap \mathcal{I}_k\right)$.
- **b)** En déduire que la suite $\left(\dim \mathcal{N}_{k+1}-\dim \mathcal{N}_k\;\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé a U.

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\operatorname{Im}(u^r)$.

a) Vérifier que $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(u^{s+r})$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u^s)$.

c) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\operatorname{Ker}(u^r)) + \dim(\operatorname{Ker}(u^s))$.

d) En déduire que pour tout entier naturel $i, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) \leq i$.

2. On suppose de plus que $U^n = 0$.

a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n, \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^i\right)\right) = i$.

b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n.

c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = \left(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e)\right)$ soit une base de E.

d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.

3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n-1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\left(\operatorname{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k \operatorname{Id}_E)^{m_k}\right)$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f.

2. Montrer que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$,
$\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k.

c) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Partie 4 : Cycles

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre un entier naturel non nul p s'il existe x_0 de E vérifiant les conditions :

— $f^p(x_0) = x_0$.

— $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est une famille génératrice de E dont les éléments sont distincts deux a deux.

On dit alors que la famille $\left(x_0, f(x_0) \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est un $p-$ cycle de f.

1. Soit $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ un $p-$ cycle de f.

a) Montrer que $f^p = \mathrm{Id}_E$.

b) Montrer que l'ensemble

$$F_{x_0} = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\right) \text{ est une famille libre}\right\}$$

admet un maximum noté γ.

c) **i)** Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq \gamma$, on a :

$$f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0)\right).$$

ii) Montrer que $\gamma = n$.

iii) Déterminer le nombre des valeurs propres distinctes de f.

2. Soit $\mathcal{B}_{x_0} = \left(x_0, f(x_0) \dots \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ un n-cycle de f.

a) Justifier que $\mathcal{B}_{x_0}$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice G de l'endomorphisme f dans la base B_{x_0}.

c) On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué de ω.
Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, vérifier que U_k est un vecteur propre de G associé à une valeur propre α_k à déterminer.

3. Soit $M = (m_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que, pour tout couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$. On note $\overline{M} = (\overline{m}_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}$, où $\overline{m}_{k,l}$ est le conjugué de $m_{k,l}$.

a) Calculer $M\,\overline{M}$.

b) En déduire que $M \in GL_n(C)$ et calculer M^{-1}

4. Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \ldots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que H est diagonalisable.

b) Déterminer les valeurs propres de H et une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H.

Partie 5 : La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est composée seulement par des 0 . On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{T}$.

2. Montrer que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de $\mathcal{T}$.

3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}$.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$ tel que l'on aie : $\dim(F) > \frac{n(n-1)}{2}$. Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) > 0$.

5. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{N}$.

Partie 6 : L'équations $X^2 = X^3$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans toute cette partie, M est une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = M^3$ et on considère les matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Montrer que u admet un polynôme annulateur P scindé unitaire de degré 3 à préciser.

2. En déduire que le polynôme minimal π_u de u réalise :

$$(\star) \quad \pi_u \in \{X, X-1, X^2, X^2 - X, X^3 - X^2\}$$

3. Que devient $(\star)$ si on suppose que $M \neq 0$ et $M \notin \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$?

On suppose *désormais* que $M \neq 0$ et M non inversible

4. Dans cette question, on suppose que $\pi_u = X^2 - X$. Démontrer alors que M est semblable à l'une des matrices M_2 ou M_3.

5. Dans cette question on suppose que $\pi_u = X^2$.

- **a)** Vérifier que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{rg}\,(u)$.
- **b)** Montrer que l'on a les inclusions strictes $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^2)$.
- **c)** Démontrer qu'il existe aux moins un vecteurs $V_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(V_1) \neq 0$. On pose alors $V_3 = u(V_1)$. Prouver alors que (V_1, V_3) est une famille libre.
- **d)** En déduire l'existence d'un vecteur $V_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $u(V_2) = 0$.
- **e)** Montrer que M est semblable à M_1.

6. On suppose dans cette question que $\pi_u = X^3 - X^2$.

- **a)** Justifier que u est trigonalisable. Est ce que u est diagonalisable ?
- **b)** Justifier que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et en déduire que l'on a : $\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^2) \subsetneq \mathbb{R}^3$
- **c)** Montrer qu'il existe une base $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $u(V_1) = 0$ et $u(V_2) = V_1$ et $u(V_3) = V_3$.
- **d)** En déduire que M est semblable à M_4.

7. Quelles sont les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui réalisent $X^2 = X^3$?