Partie I : Préliminaires

1) Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n} X^k$ un polynôme et $x \in \operatorname{Ker} P(f)$, on a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} f^k\right)(f(x))=\sum_{k=0}^{n} f^k \circ f(x)=\sum_{k=0}^{n} f \circ f^k(x)=f\left(\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right)=f(0)=0,$$

donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(P(f))$ et , $\operatorname{Ker}(P(f))$ est stable par f.

2)a) - Si v est un vecteur propre de f associé à λ. Pour $w=\mu v \in \operatorname{Vect}(v)$, $f(w)=f(\mu v)=\mu f(v)=\mu\lambda v \in \operatorname{Vect}(v)$. $\operatorname{Vect}(v)$ est stable par f.
- Si, pour un vecteur non nul, $\operatorname{Vect}(v)$ est stable par f, $f(v) \in \operatorname{Vect}(v)$, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v)=\lambda v$, puisque v est une base de $\operatorname{Vect}(v)$, v est vecteur propre de f associé à λ.

b) On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Détermination, en en donnant une base, des droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g :
Cela revient à donner toutes les droites propres. Les valeurs propres de la matrice triangulaire supérieure B sont sur la diagonale : 1 et 2 sont les valeurs propres de B. On voit immédiatement que e_1 est vecteur propre associé à 1 et e_3 est vecteur propre associé à 2 . D'après le théorème du rang, l'espace propre associé à 1 est de dimension 1 car $B-\mathrm{Id}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang $2=3-1$. De même, l'espace propre associé à 2 est de dimension 1 car $B-2\mathrm{Id}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang $2=3-1$. B ne possède donc que deux droites propres,
les droites stables sont donc $\operatorname{Vect}(e_1)$ et $\operatorname{Vect}(e_3)$.

3) Soit p un entier naturel non nul.

a) Si $F_1,\ldots,F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f. Soit $(x_k)_{k\in[\![1,p]\!]} \in \prod_{k=1}^{p} F_k$, $f(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k)=\sum\limits_{k=1}^{p} f(x_k) \in \sum\limits_{k=1}^{p} F_k$, puisque $f(x_k) \in F_k$. $\sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

b) Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1,\ldots,n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme $\sum\limits_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$ est stable par f. En utilisant la question 1) avec le polynôme $(X-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$, on voit que, pour tout λ_k, $\operatorname{Ker}(f-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$ est stable par f. Alors, d'après la question 2), $\sum\limits_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f-\lambda_k \mathrm{Id}_E)^{n_k}$ est stable par f. Le fait que les λ_k soient des valeurs propres n'intervient pas, il nous garantit seulement que le sous-espace stable est consistant (i.e loin d'être réduit à 0).

4)a) Soit F stable par f et $x \in F$, $(f-\lambda\,\mathrm{Id})(x)=f(x)-x \in F$, comme somme de deux vecteurs de F, donc F est stable par $f-\lambda\,\mathrm{Id}$. Réciproquement si F est stable par $f-\lambda\mathrm{Id}$, d'après le premier sens, F est stable par $(f-\lambda\mathrm{Id})-(-\lambda)\mathrm{Id}=f$.

b) Si F est stable par f, alors $f^2(F)=f(f(F)) \subset f(F) \subset F, F$ est stable par f^2. La réciproque est fausse comme le montre la rotation de $\frac{\pi}{2}$, de matrice $R=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $R^2=-\mathrm{Id}$. Les valeurs propres de R sont parmi (en fait sont) i et $-i$ (X^2+1 est annulateur), R ne possède donc aucune droite stable (question 1), pourtant toutes les droites (vectorielles) sont stables par $R^2=-Id$.

c) Puisque f^{-1} existe, f est bijective, donc injective. Soit F un sous-espace stable par f, on a $f(F) \subset F$. L'endomorphisme de F, $f_{|_F}$, restriction à F de f reste injectif (son noyau est $F \cap \operatorname{Ker} f=\{0\}$), donc bijectif car $F \subset E$ est de dimension finie, il est en particulier surjectif et $f(F)=F$, on a donc $f^{-1}(F)=f^{-1}(f(F))=F$ et F est stable par f^{-1}, alors f et f^{-1}ont les mêmes sous-espaces stables.

d) Soit f un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B}=(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E. f laisse stable toutes les droites vectorielles $\operatorname{Vect}(e_i)$, c'est à dire que $\forall i \in [[1,n]], e_i$ est vecteur propre associé à f (question 2)a) et à une valeur propre μ_i. Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$, tels que $i \neq j$, la droite $\operatorname{Vect}(e_i+e_j)$ est stable, donc, e_i+e_j est propre et pour un certain réel μ, $f(e_i+e_j)=\mu(e_i+e_j)$. On a donc, $\mu(e_i+e_j)=f(e_i+e_j)=f(e_i)+f(e_j)=\mu_i e_i+\mu_j e_j$. Puisque (e_i,e_j) est libre, $\mu=\mu_i=\mu_j$ dès que $i \neq j$, nécessairement les μ_i sont égaux, donc $f=\mu\mathrm{Id}$. Réciproquement, il est évident que si $f=\mu\,\mathrm{Id}$, elle laisse tous les sous-espaces stables. $f \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout sous-espace de E est de la forme $f=\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

e) La rotation R d'angle $\frac{\pi}{2}$, décrite plus haut convient : elle n'a pas de sous-espaces stables de dimension 1 , donc les seuls espaces $\{0\}$ et E de dimension 0 et 2 sont stables. **5°**) a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E. On pourra compléter une base d'un hyperplan en une base de E. - Soit f forme linéaire non nulle sur $E, f(E)=\mathbb{R}, \operatorname{dim} \operatorname{Im} f=1$ et d'après la théorème du rang, $\operatorname{dimKer} f=n-1$, $\operatorname{Ker} f$ est donc un hyperplan. Soit H est un hyperplan, de base $(f_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ que l'on complète en une base $(f_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ de E. Soit $p_n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i \mapsto x_n$, la $n^{\text{ième}}$ application coordonnée, c'est une forme linéaire et son noyau est $H=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i f_i\right\}$. Les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E.

b)i) Supposons que $\varphi \circ f=\lambda \varphi$. Soit $x \in H, \varphi(f(x))=\lambda \varphi(x)=0$ donc $f(x) \in H$ et H est stable par f. Réciproquement, supposons que $f(H) \subset H$, deux cas :
- la forme linéaire $\varphi \circ f$ est nulle, alors $\varphi \circ f=0=0 \varphi$, c'est gagné.
- la forme linéaire $\varphi \circ f$ n'est pas nulle, alors il existe x_0 tel que $\varphi \circ f(x_0) \neq 0 . x_0 \notin H$ (sinon $f(x_0) \in H$ et $\varphi(f(x_0)=0)$, les formes linéaires $\varphi \circ f$ et $\frac{\varphi(f(x_0))}{\varphi(x_0)} \varphi$ coïncident sur H et sur $x_0 \notin H$ (qui engendrent E), donc sur E, elles sont égales, $\varphi \circ f=\frac{\varphi(f(x_0))}{\varphi(x_0)} \varphi$.

ii) La traduction en termes de matrices dans les bases canoniques de la condition nécessaire et suffisante $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \varphi \circ f=\lambda \varphi$ est $\exists \lambda \in \mathbb{R}, L A=\lambda L$, ce qui donne, en transposant les deux membres, on a $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^t A {}^t L=\lambda {}^t L$.

c) D'après la question précédente, H, d'équation $\varphi(x)=0(\varphi \neq 0)$, est un plan stable de f si et seulement si la matrice L de φ dans les bases canoniques vérifie $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^t A {}^t L=\lambda {}^t L$. Autrement dit, H, d'équation $\varphi(x)=0$, est un plan stable de f si et seulement si la transposée de la matrice L de φ est vecteur propre de ${}^t A$.
- Recherchons les vecteurs propres de ${}^t B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Les valeurs propres de la matrice triangulaire inférieure ${}^t B$ sont sur la diagonale : 1 et 2 sont les valeurs propres de ${}^t B$. On voit immédiatement que $\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 1 et que $\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 2. D'après le théorème du rang, l'espace propre associé à 1 est de dimension 1 car ${}^t B-\mathrm{Id}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est de rang $2=3-1$. De même, l'espace propre associé à 2 est de dimension 1 car ${}^t B-2 \mathrm{Id}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est de rang $2=3-1$. ${}^t B$ admet deux valeurs propres 1 et 2 associée aux vecteurs propres $\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 2\end{pmatrix}$.

- Revenons à notre recherche des plans stables : Pour ${}^t L=\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, L=(0,1,0)$ et $\varphi:(x, y, z) \mapsto y$, pour ${}^t L=\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, L=(0,0,1)$ et $\varphi:(x, y, z) \mapsto z$. On a donc deux plans stables d'équation $y=0$ et $z=0$, les plans $\operatorname{Vect}(e_1, e_3)$ et $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Partie II : Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable

1) Si $p=1, f$, diagonalisable et n'ayant qu'une seule valeur propre, est une homothétie (i.e $=\lambda$ Id) : tous les sous-espaces de E sont stables. **2°**) On suppose l'entier p au moins égal à 2 . On considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f et un élément x de F.

a) On sait, puisque f est diagonalisable, que E est somme directe des sous espaces propres : $E=\bigoplus_{k=1}^p E_k$. Tout x de $F \subset E$ se décompose donc de manière unique $x=\sum\limits_{k=1}^p x_k$ avec $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad x_k \in E_k$.

b) Pour $x=\sum\limits_{k=1}^p x_k \in F,\ f(x)=f\left(\sum\limits_{k=1}^p x_k\right)=\sum\limits_{k=1}^p f(x_k)=\sum\limits_{k=1}^p \lambda_k x_k$ est dans F qui est stable, le vecteur $f(x)-\lambda_1 x= \sum\limits_{k=1}^p \lambda_k x_k-\lambda_1 \sum\limits_{k=1}^p x_k=\sum\limits_{k=1}^p(\lambda_k-\lambda_1) x_k=\sum\limits_{k=2}^p(\lambda_k-\lambda_1) x_k$, appartient donc à F (sous-espace vectoriel).

c) En recommençant la même manœuvre que dans la question précédente $\sum\limits_{k=3}^p(\lambda_k-\lambda_2)(\lambda_k-\lambda_1) x_k \in F$ et en itérant on arrive à $\prod_{i=1}^{p-2}(\lambda_{p-1}-\lambda_i) x_{p-1}+\prod_{i=1}^{p-2}(\lambda_p-\lambda_i) x_p \in F$, et enfin $\prod_{i=1}^{p-1}(\lambda_p-\lambda_i) x_p \in F$.
Puisque les λ_i sont distincts, $x_p \in F$, en reprenant l'avant dernière égalité, on tire $x_{p-1} \in F$ et en remontant encore, on voit que tous les $x_i,(i \in [\![1, p]\!])$ sont dans F.

3) Montrons que si F est stable par $f, F=\bigoplus_{k=1}^{p}\left(F \cap E_{k}\right)$. L'inclusion $\bigoplus_{k=1}^{p}\left(F \cap E_{k}\right) \subset F$ est évidente (somme de sous-espaces vectoriels de F). L'inclusion $F \subset \sum_{k=1}^{p}\left(F \cap E_{k}\right)$ résulte de la question précédente.

- Il reste à constater que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$F_{i} \cap\left(\sum_{\substack{i=j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} F_{j}\right) \subset E_{i} \cap\left(\sum_{\substack{i=j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} E_{j}\right)=\{0\}$$

pour conclure que la somme est directe, ce que l'on ne demandait pas.

4) Les $F_{k}=F \cap E_{k}$ sont des sous-espaces propres de la restriction de f à F, puisque $F=\bigoplus_{k=1}^{p}\left(F \cap E_{k}\right)$, la restriction de f à F est diagonalisable.

5) Dès que f possède un sous-espace propre de dimension supérieure ou égale à deux, il possède déjà une infinité de sous-espaces stables, les droites vectorielles de ce sous-espace. Une condition nécessaire pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f est que f ne possède que des sous-espaces propres de dimension 1 , c'est à dire que f doit avoir n valeurs propres distinctes. C'est suffisant, les sous-espaces stables sont les $\sum_{i=1}^{n} F_{k}$ avec $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_{k} \subset E_{k}$, ce qui entraîne puisque E_{k} est de dimension $1, F_{k}=\{0\}$ ou $F_{k}=E_{k}$. Les sous-espaces stables sont les $\sum_{i \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)}^{n} F_{k}$, où $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et sont donc au nombre de 2^{n}.

Partie III : Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

1) On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

a)On a, pour $k \leq l, \quad D^{k}\left(X^{l}\right)=\frac{l!}{(l-k)!} X^{l-k}$ et, pour $k>l, \quad D^{k}\left(X^{l}\right)=0$. Par linéarité, pour un polynôme de degré inférieur à $n-1, D^{n}(P)=0$ et puisque $D^{n-1}\left(X^{n-1}\right)=(n-1)!$, D^{n-1} n'est pas nulle sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Il est évident que les sous-espaces précédents sont stables par D, montrons que ce sont les seuls. Soit F un sous-espace stable par D, soit P un polynôme de plus haut degré, k, de F. On a $F \subset \mathbb{R}_{k}[X] . F$ étant stable, $D(P)=P', D^{2}(P)= P'', \ldots, D^{k}(P)=P^{(k)}$ sont dans F, de degré distincts, donc libres dans $F \subset \mathbb{R}_{k}[X]$, ils forment une base de $\mathbb{R}_{k}[X]$. On a donc $\mathbb{R}_{k}[X] \subset F \subset \mathbb{R}_{k}[X], F=\mathbb{R}_{k}[X]$.

2)a) On a $A=\left(\begin{array}{ccccc}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0\end{array}\right)$, A est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne $j(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ vaut 1 si $j=i+1$ et 0 sinon. Puisque $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$, il existe x_{0} tel que $f^{n-1}\left(x_{0}\right) \neq 0$. Considérons la famille $\left(f^{k}\left(x_{0}\right)\right)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ et montrons qu'elle est libre. Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{k} f^{k}(x_{0})=0$. Soit l le plus petit entier tel que $\mu_{l} \neq 0$, on a donc $\sum_{k=l}^{n-1} \mu_{k} f^{k}\left(x_{0}\right)=0$, en composant par f^{n-l-1}, on obtient $f^{n-l-1}(\sum_{k=l}^{n-1} \mu_{k} f^{k}(x_{0}))=f(0)$, donc $\sum_{k=l}^{n-1} \mu_{k} f^{k+(n-l-1)}(x_{0})=0$, donc $\mu_{l} f^{n-1}(x_{0})=0$, d'où $\mu_{l}=0$, ce qui est absurde : tous les coefficient μ_{i} sont nuls, la famille est bien libre. $(f^{k}(x_{0}))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est une famille libre de n vecteurs dans E de dimension n, c'est une base de E. Puisque $f(f^{n-1}(x_{0}))=f^{n}(x_{0})=0$ et que, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f(f^{n-k}(x_{0}))=f^{n-(k-1)}(x_{0}))$, la matrice de f dans la base $(f^{n-k}(x_{0}))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ (c'est la même que ci-dessus à l'ordre près) est A.

b) B est donc la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne $j(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ vaut i si $j=i+1$ et 0 sinon. Puisque $f\left(f^{n-1}\left(x_{0}\right)\right)=f^{n}\left(x_{0}\right)=0$ et que, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f\left((k-1)!f^{n-k}\left(x_{0}\right)\right)=(k-1)\left((k-2)!f^{n-(k-1)}\left(x_{0}\right)\right)$, la matrice de f dans la base $((k-1)!f^{n-k}(x_{0}))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est B, donc A est semblable à B.

c) On remarque immédiatement que la matrice de D, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, est B, les sous-espaces stables de B sont les mêmes, à un isomorphismes près, que ceux de D. Ce sont donc

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Vect}\left(f^{n-1}\left(x_{0}\right)\right), \\ \operatorname{Vect}\left(f^{n-1}\left(x_{0}\right), f^{n-2}\left(x_{0}\right)\right), \\ \operatorname{Vect}\left(f^{n-1}\left(x_{0}\right), f^{n-2}\left(x_{0}\right), 2 f^{n-3}\left(x_{0}\right)\right), \\ \vdots \\ \operatorname{Vect}\left(f^{n-1}\left(x_{0}\right), f^{n-2}\left(x_{0}\right), 2 f^{n-3}\left(x_{0}\right), \ldots,(n-k)!f^{k-1}\left(x_{0}\right), \ldots,(n-1)!x_{0}\right)\end{array}\right. .$$

Partie IV : Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

1)a) $f(f(F_2)) = \{0\}$ puisque $f^2 = 0$, donc $f(F_2) \subset \operatorname{Ker} f$.
b) Soit $F_2 \cap F_1 \subset F_2 \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}, F_2 \cap F_1 = \{0\}$, la somme $F_1 + F_2$ est directe. Soit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2, f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) \in F_1$ car $f(F_2) \subset F_1, F_1 + F_2$ est stable.
c) Étant donné A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E, établir l'inclusion $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$.
A -t-on nécessairement l'égalité ? Soit $a \in A \cap C$ et $b \in B \cap C$, alors $a + b \in A + B$ et $a + b \in C$ donc $a + b \in (A + B) \cap C$.
L'inclusion en sens inverse est fausse comme le montre l'exemple de trois droites distinctes.

d) D'après l'inclusion précédente, $(F_1 \cap \operatorname{Ker} f) + (F_2 \cap \operatorname{Ker} f) \subset (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f F_1 + \{0\} \subset (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f F_1 \subset (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f$. Soit $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x_1 + x_2 \in (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f$, puisque $x_1 \in F_1 \in (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f$, $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f$, ce qui entraîne $x_2 = 0$, car $F_2 \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Donc $F_1 = (F_1 + F_2) \cap \operatorname{Ker} f$.
2) Réciproquement on considère un sous-espace vectoriel F de E stable par f. On pose $F_1 = F \cap \operatorname{Ker} f$ et on considère un sous-espace vectoriel F_2 supplémentaire de F_1 dans F. Vérifier l'inclusion $f(F) \subset \operatorname{Ker} f$ et prouver que l'intersection $F_2 \cap \operatorname{Ker} f$ est réduite au vecteur nul. On a encore $f(f(F)) = \{0\}$ puisque $f^2 = 0$, donc $f(F) \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $F_2 \cap \operatorname{Ker} f = (F_2 \cap F) \cap \operatorname{Ker} f = F_2 \cap (F \cap \operatorname{Ker} f) = F_2 \cap F_1 = \{0\}$, la somme $F_2 + \operatorname{Ker} f$ est directe. 3°) Dans cette question, on suppose que l'entier n est égal à 4 (i.e. $E = \mathbb{R}^4$) et on considère l'endomorphisme h de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) On a immédiatement $M - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(M - Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$M - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(M - 2Id)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(h - \mathrm{Id})^2 (e_1) = 0, (h - \mathrm{Id})^2 (e_2) = 0, (h - 2\mathrm{Id})^2 (e_3) = 0, (h - 2\mathrm{Id})^2 (e_4) = 0.$$

donc, puisqu'à voir leurs matrices, $(h - \mathrm{Id})^2$ et $(h - 2\mathrm{Id})^2$ sont de rang 2 , en utilisant le théorème du rang, G_1 et G_2 sont de dimension 2,

$$G_1 = \operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2), \quad \text{et} \quad G_2 = \operatorname{Ker}(h - \mathrm{Id})^2 = \operatorname{Vect}(e_3, e_4)$$

sont supplémentaires car $\{e_1, e_2\}$ et $\{e_3, e_4\}$ forment une partition de la base canonique. b) Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par h sont exactement les sommes $H_1 + H_2$ où H_1 (resp. H_2) est un sous-espace vectoriel de G_1 (resp. G_2.) stable par h. Remarquons que G_1 et G_2 sont stables d'après I)3)b). Soit F stable, $H_1 = G_1 \cap F$ et $H_2 = G_2 \cap F$ sont stables (comme intersection de sous-espaces stables). Puisque $G_1 \oplus G_2 = E, H_1 \oplus H_2 = F$.

c) Les droites stables de G_1 sont les espaces propres de la restriction de f à G_1, une seule droite stable $\operatorname{Vect}(e_1)$. De même, il n'y a qu'une droite stable dans $G_2, \operatorname{Vect}(e_3)$. Les sous-espaces stables de f sont obtenus en sommant ceux de $G_1 :\quad \{0\}, \operatorname{Vect}(e_1), \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$, et ceux de $G_2 :\quad \{0\}, \operatorname{Vect}(e_3), \operatorname{Vect}(e_3, e_4)$. En voici la liste classée par dimension :

- dimension 0 : $\{0\} = \operatorname{Vect}(\emptyset)$,
- dimension 1 : $\operatorname{Vect}(e_1), \operatorname{Vect}(e_2)$,
- dimension 2 : $G_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2), G_2 = \operatorname{Vect}(e_3, e_4), \operatorname{Vect}(e_1, e_3)$,
- dimension 3 : $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3), \operatorname{Vect}(e_1, e_3, e_4)$,
- dimension 4 : $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Partie V : Existence d'un plan stable par un endomorphisme

1) On note M un polynôme non nul à coefficients réels de plus bas degré annulant f. On observera que M n'est pas constant. E étant de dimension $n, \mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2, la famille de $n^2 + 1$ vecteurs $\left(f^k\right)_{k \in [\![0, n^2]\!]}$ de $\mathcal{L}(E)$ est donc liée : il existe une famille de réels, non tous nuls, $(\mu_k)_{k \in [\![0, n^2]\!]}$ telle que $\sum\limits_{k=0}^{n^2} \mu_k f^k = 0$, donc le polynôme, non nul, $\sum\limits_{k=0}^{n^2} \mu_k X^k$ annule f. L'ensemble $\{d^\circ P$ où $P \neq 0$ et $P(f) = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui possède un plus petit élément d, il existe donc M, non nul, annulateur de f et de degré minimum d.

2)a) $M = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ est à coefficient réels, donc égal à son conjugué $\sum\limits_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k$,

$$M(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k z}^k = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k = \overline{0} = 0,$$

donc $\overline{z}$ est aussi racine de M.
Puisque $z \neq \overline{z}$, le polynôme M est divisible par$(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\mathcal{R}e(z)X + |z|^2 = X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

b)On peut écrire la division euclidienne $M = \left(X^2 + bX + c\right) Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et de degré $d-2$. Si $f^2 + bf + c\,\mathrm{Id}_E$ était injectif, puisque E est de dimension finie, il serait bijectif et, de $M(f) = 0$, par composition par l'inverse $\left(f^2 + bf + c\,\mathrm{Id}_E\right)^{-1}$, on aurait $Q(f) = 0$, ce qui contredit la définition de d minimum : $f^2 + bf + c\,\mathrm{Id}_E$ n'est donc pas injectif.

c) Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2 + bf + c\,\mathrm{Id}_E\right)$, non nul, on a $f^2(x) = -bf(x) - ax$. D'autre part, x n'est pas vecteur propre de f (sinon le polynôme annulateur M aurait au moins sa valeur propre associée comme racine réelle), donc x et $f(x)$ ne sont pas liés et forment donc une base de $F = \mathrm{Vect}(x, f(x))$. Pour $y = \lambda x + \mu f(x) \in F$, $f(y) = f(\lambda x + \mu f(x)) = \lambda f(x) + \mu f^2(x) = \lambda f(x) + \mu(-bf(x) - ax) \in F$, F est un plan stable de f.

3)a) Puisque M est de degré minimum, $(X-\lambda)^{p-1}$ n'annule pas f, ou, en se ramenant à $g, g^p = 0$ et $g^{p-1} \neq 0$, g est nilpotent d'ordre p, en modifiant légèrement la solution de la question III)2)a) (ici on n'a pas $p = n$), on prouve qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $\left(x, g(x), \ldots, g^{p-1}(x)\right)$ est libre.

b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f. Dans la question précédente, $p \geq 2$, donc on peut considérer le plan $F = \mathrm{Vect}\left(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x)\right)$, manifestement stable par g $(g^p(x) = 0)$, donc stable par f(question I)4) a)).

4) Pour cette question il fallait supposer que $\dim(E) > 1$.
Supposons donc $\dim(E) > 1$. Montrons que si λ est racine de M, elle est valeur propre de f. Dans ce cas, $M = (X-\lambda)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d-1$, $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ ne peut être injectif, puisque E est de dimension finie, il serait bijectif et, de $M(f) = 0$, par composition par l'inverse $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^{-1}$, on aurait $Q(f) = 0$, ce qui contredit la définition de d minimum. $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif et λ est valeur propre de f.
• Quatre cas :
• M possède au moins une racine complexe non réelle. D'après 2), f admet un plan stable (le fait que M n'ait pas de racines réelles ne sert à rien dans la démonstration de 2)).
• M possède au moins deux racines réelles, λ_1 et λ_2. Ce sont des valeurs propres de f et si l'on considère e_1 et e_2 vecteurs propres associés, $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ est un plan stable par f.
• M ne possède qu'une seule racine réelle et pas de racine complexe non réelle, λ. Puisque M n'est pas constant il est de la forme
• soit $M = a(X-\lambda)$, alors $a(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0, f$ est l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}$ et puisque E est de dimension supérieure ou égale à 2 , tous les plans de E sont stables.
• soit $M = a(X-\lambda)^p$, avec $p \geq 2$, d'après la question précédente, il existe un plan stable par f.