Proposition de corrigé pour le DL 5

Partie I

1. On donne trois méthodes, qui sont toutes valables :

• `Une première méthode`: Si $A=(x_{ij})_{1\le i,j\le p}$ alors $d_\lambda(A)=\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod\limits_{k=1}^{p}(\lambda\delta_{k,\sigma(k)}-x_{k,\sigma(k)})$. Il en découle que $d_A(A)$ est une fonction polynomiale des coordonnées $x_{i,j}$ de A dans la base canonique $(E_{ij})_{1\le i,j\le p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, par suite d_A est continue.

• `Une deuxième méthode`: $d_\lambda(A)=\det((g+h)(A))$ avec $g(A)=\lambda I_p$ et $h(A)=-A$, pour tout $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Les applications g et h sont continues car g est constante et h linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies, donc $g+h$ est continue et par composition et la continuité de det, l'application d_λ est continue.

• `Une troisième méthode`: Posons $f(A)=\lambda I_p-A$, pour toute $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors pour toutes $A,B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a $\|f(A)-f(B)\|=\|A-B\|$, donc f est lipschitzienne donc continue et comme det est continue $d_\lambda=\det\circ f$ est continue.

2. a) Par définition de L_i, on a $L_i(\lambda_j)=0$, pour tout $j\in[\![0,p]\!]\backslash\{i\}$, donc L_i admet au moins p racines deux à deux distinctes et comme $L_i\in\mathbb{K}_p[X]$, il existe une constante C_i tel que $L_i=C_i\prod\limits_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{p}(X-\lambda_k)$; or $L_i(\lambda_i)=1$, donc $C_i\prod\limits_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{p}(\lambda_i-\lambda_k)=1$ et $C_i=\prod\limits_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{p}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}$, et finalement, $L_i=\prod\limits_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{p}\frac{X-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}$. Soit $(\alpha_k)_{0\le k\le p}$ une famille de scalaires tel que $\sum\limits_{k=0}^{p}\alpha_kL_k=0$. Pour tout $i\in[\![0,p]\!]$, en appliquant à l'élément λ_i et en tenant compte de $L_k(\lambda_i)=\delta_{k,i}$, on obtient $\alpha_i=0$. La famille $(L_0,L_1,\ldots,L_p)$ est donc libre. Comme $\dim(\mathbb{K}_p[X])=p+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

b) Avant tout, remarquons que si $P\in\mathbb{K}_p[X]$ et (α_k) la famille des coordonnées de P relativement à la base (L_k) alors $P=\sum\limits_{k=0}^{p}\alpha_kL_k(X)$, et en appliquant à λ_i à X, on obtient $\alpha_i=P(\lambda_i)$ et donc $P=\sum\limits_{k=0}^{p}P(\lambda_k)L_k(X)$, en particulier, on a : $\chi_A=\sum\limits_{k=0}^{p}\chi_A(\lambda_k)L_k=\sum\limits_{k=0}^{p}d_{\lambda_k}(A)L_k$.

c) Les fonctions composantes de χ dans la base $(L_0,L_1,\cdots,L_p)$ de $\mathrm{K}_p[X]$ sont donc les applications d_{A_k}, elles sont continues donc $\chi=\sum\limits_{k=0}^{p}d_{\lambda_k}L_k$ est continue.

3. a) la suite $(A_n)_n$ converge vers 0 donc par continuité de l'application χ, la suite $(\chi(A_n))_n$ converge vers $\chi(0) = \chi_0 = X^p$. Comme toute matrice A_n est semblable à A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, \chi(A_n) = \chi(A) = \chi_A$, donc $\chi_A = X^p$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^p = 0$. A est donc nilpotente.

b) Si A est nilpotente, alors le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^p$. Comme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable. Si on note $D_n T D_n^{-1} = (\beta_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq p}$ alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a $\beta_{i,j}(n) = n^{i-j}\alpha_{i,j}$. On a $\beta_{i,j}(n) = 0$ si $i > j$ car $\alpha_{i,j} = 0$ puisque T est triangulaire supérieure, par ailleurs comme A est nilpotente T aussi est nilpotente donc $\alpha_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, donc $\beta_{i,j}(n) = 0$ pour $i \geq j$, comme pour $i < j$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{i-j} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_{i,j}(n) = 0$. Ainsi on a : $\forall i, j \in [\![1,p]\!], \lim\limits_{n \to +\infty} \beta_{i,j}(n) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n T D n^{-1} = 0$ et par suite si on pose $A_n = D_n T D_n^{-1}$, la suite (A_n) est une suite de matrices nilpotentes semblables à A de limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) Puisque $p \geq 2$, il existe une marice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ nilpotente et non nulle, par exemple $A = E_{1,p}$. La question précédente assure l'existence d'une suite $(A_n)_n$ de matrices semblables à A qui converge vers 0. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|A_n\| = \|A\|$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|A_n\| = 0$, donc $\|A\| = 0$ soit $A = 0$, or $A \neq 0$, c'est absurde, donc une telle norme n'existe pas.

Partie II

Rappelons que si $(P_n)_n$ est une suite de polynômes de $\mathbb{K}_p[X]$, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_{p,k} X^k$ alors la suite $(a_{k,n})$ est la k ème composante de (P_n) relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^p)$ de $\mathbb{K}_p[X]$, on sait alors que la suite $(P_n)_n$ converge si et seulement si pour chaque $k \in [\![0,p]\!]$, la suite $(a_{k,n})_n$ converge et que si c'est le cas, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \sum_{k=0}^{p} \left(\lim_{n \to +\infty} a_{k,n} \right) X^k$$

1. Soit une suite $(P_n)_n$ d'éléments de $U_p(\mathbb{C})$ qui converge dans $\mathbb{K}_p[X]$ vers un polynôme P. Alors pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ la suite formée des coéfficients des polynômes P_n selon X^k, converge vers le coéfficient du même terme de P. Les polynômes P_n étant tous unitaires de degré p, on voit en particulier que P est unitaire de degré p. Comme tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, P est scindé. Alors $P \in U_p(\mathbb{C})$. $U_p(\mathbb{C})$ est ainsi un fermé.

2. P un polynôme unitaire de $\mathbb{K}_p[X]$ et a une racine de P. Posons $P = X^k + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$. où $k \leqslant p$ Notons que : $\|P\| = 1 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} |\alpha_i|$.

• Si $|a| \leqslant 1$ alors $|a| \leqslant \|P\|$.

• Si $|a| > 1 \quad a^k = -\sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i a^i$ donne : $|a|^k \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k-1} |\alpha_i|\,|a|^i \leqslant |a|^{k-1} \sum\limits_{i=0}^{k-1} |\alpha_i|$ et comme $a \neq 0$ alors : $|a| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k-1} |\alpha_i| \leqslant \|P\|$

3. a) Il suffit de prendre une suite $(X_n)_n$ telle que $X_{2n} = (1,-1)$ et $X_{2n+1} = (-1,1)$. On aura pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^2 - 1$, la suite $(P_n)_n$ est constante donc convergente, mais $(X_n)_n$ est clairement divergente.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = (X - \frac{1}{n+1})(X - \frac{1}{n+2})$, donc $P_n = X^2 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) X + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Les polynômes P_n sont tous scindés à racines simples, mais la suite $(P_n)_n$ converge vers $P = X^2$ scindé sans qu'il soit à racines simples.

c) D'après la question **II-2)**, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $|x_{k,n}| \leq \|P_n\|$, et par suite $\|X_n\|_\infty \leq \|P_n\|$. Comme la suite $(P_n)_n$ est convergente, alors elle est bornée et donc la suite $(X_n)_n$ est bornée. D'après le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, la suite $(X_n)_n$ admet au moins une valeurs d'adhérence qu' on note $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$.

d) Comme Y est une valeur d'adhérence de $(X_n)_n$, il existe une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_n$ de $(X_n)_n$ qui converge vers Y. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $(x_{k,\varphi(n)})_n$ converge vers y_k. Posons

$$P_n = \prod_{i=1}^{p} (X - x_{i,n}) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_{k,n} X^k$$

et

$$Q = \prod_{i=1}^{p} (X - y_i) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} b_k X^k.$$

On a les relations suivantes entre coefficients et racines d'un polynôme scindé : Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

$$\begin{cases} a_{p-k,n} = (-1)^k \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p} x_{i_1,n} x_{i_2,n} \cdots x_{i_k,n} \\ \\ b_{p-k} = (-1)^k \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant p} y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_k} \end{cases}$$

On déduit que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite $\left(a_{p-k,\varphi(n)}\right)_n$ converge vers b_{p-k}. Alors $\left(P_{\varphi(n)}\right)_n$ converge vers Q, et par unicité de la limite, on a : $P = Q = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - y_i)$

e) On a considéré une suite convergente quelconque d'éléments de $U_p(\mathbb{R})$ et on a montré que sa limite est dans $U_p(\mathbb{R})$. Alors $U_p(\mathbb{R})$ est un fermé.

4. Par continuité de l'application χ, la suite $(\chi(A_n))_n$ converge vers $\chi(A)$. Les polynômes χ_{A_n} sont dans $U_p(\mathbb{K})$. $U_p(\mathbb{K})$ étant fermé, la limite χ_A est dans $U_p(\mathbb{K})$. En particulier χ_A est scindé et donc A est trigonalisable.

5. Soit A une matrice diagonalisable. Soit T une matrice triangulaire supérieure d'éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_p$ non forcément deux à deux distincts, semblable à A. Et soit P inversible telle que $A = PTP^{-1}$. On définit la constante k comme suit :

$$k = \begin{cases} \frac{1}{2} \min\limits_{\lambda_i \neq \lambda_j} \left| \frac{\lambda_i - \lambda_j}{i-j} \right| & \text{si } \ \operatorname{card}(\operatorname{Sp}(A)) > 1 \\ 1 & \text{si } \ \operatorname{card}(\operatorname{Sp}(A)) = 1 \end{cases}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$T_n = T + \operatorname{diag}\left(\frac{k}{n}, \frac{2k}{n}, \cdots, \frac{pk}{n}\right)$$

On voit que $k > 0$ et T_n est une matrice triangulaire supérieure dont les coéfficients diagonaux sont les scalaires $\mu_i = \lambda_i + \frac{ik}{n}$. Soit alors $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- Si $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\mu_i \neq \mu_j$ puisque $i \neq j$.
- Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ alors $\mu_i - \mu_j = \lambda_i - \lambda_j + \frac{k}{n}(i-j)$. comme $k|i-j| < |\lambda_i - \lambda_j|$ par définition de k alors $\frac{k}{n}|i-j| < |\lambda_i - \lambda_j|$ et donc $\mu_i - \mu_j \neq 0$. Ainsi la matrice T_n admet p valeurs propres deux à deux distinctes, elle est donc diagonalisable. La suite $(T_n)_n$ converge en outre vers T. Par continuité de l'application linéaire $M \longmapsto PMP^{-1}$, la suite $\left(PT_nP^{-1}\right)_n$ converge vers $PTP^{-1} = A$, les matrices PT_nP^{-1} étant toutes diagonalisables.

6. Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable, et d'après la question précédente toute matrice trigonalisable est la limite d'une suite de matrices diagonalisables. Alors $\mathcal{D}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
D'après la question II-4., la limite d'une suite de matrices diagonalisables est une matrice trigonalisable. Donc $\overline{\mathcal{D}_p(\mathbb{R})} \subset \mathcal{T}_p(\mathbb{R})$, où $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Réciproquement, d'après la question **II-5**, tout élément de $\mathcal{T}_p(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{T}_p(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{D}_p(\mathbb{R})}$. Ainsi $\overline{\mathcal{D}_p(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_p(\mathbb{R})$.

7. a. Supposons que A est diagonalisable et soient $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ ses valeurs propres deux à deux distinctes de multiplicités respectives $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. En considérant une matrice diagonale semblable à A on voit que $\chi_A = \prod\limits_{k=1}^{m} (X - \mu_k)^{\alpha_k}$. Comme A

est diagonalisable, on a $\mathbb{K}^p = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(A - \mu_k I_p)$ et par *le lemme de décomposition des noyaux*, $P = \prod_{k=1}^{m} (X - \mu_k)$ est un polynôme annulateur de A, et comme P divise χ_A, il existe un polynôme Q tel que $\chi_A = QP$, donc $\chi_A(A) = Q(A)P(A) = 0$, donc finalement $\chi_A(A) = 0$, ce qui établit le *théorème de Cayley-Hamilton.*

b. Soit A une matrice trigonalisable. D'aprés la question II-5. il existe une suite de matrices diagonalisables $(A_n)_n$ qui converge vers A. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\chi_{A_n} = X^p + a_{p-1,n}X^{p-1} + \cdots a_{1,n}X + a_{0,n}$$

et

$$\chi_A = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1X + b_0.$$

Par continuité de l'application χ, $(\chi_{A_n})_n$ converge vers χ_A donc pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $(a_{k,n})_n$ converge vers b_k. Puisque $(A_n)_n$ converge vers A alors pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(A_n^k\right)_n$ converge vers A^k (continuité de l'application $M \longmapsto M^k, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})\big)$ A_n est diagonalisable donc $\chi_{A_n}(A_n) = 0$ d'après la question précédente. Par passage à la limite quand n tend vers l'infini il vient :

$$A_n^p + a_{p-1,n}A_n^{p-1} + \cdots + a_{1,n}A_n + a_{0,n}I_p = 0$$

Donc :

$$\chi_A(A) = A^p + b_{p-1}A^{p-1} + \cdots + b_1A + b_0I_p = 0$$

Partie III

1. Si $r = p$ alors $\mathscr{I}_r(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et c'est donc un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

2. $\Rightarrow$ On suppose que $\mathrm{rg}(v) < r$, alors toute famille de vecteurs $(v(x_1), v(x_2), \cdots, v(x_r))$ de $\mathrm{Im}(v)$ est liée.
• $\Leftarrow$ Par contrapposée, supposons que $\mathrm{rg}(v) \geq r$, il existe donc une famille $(v(x_1), v(x_2), \cdots, v($
de vecteurs de $\mathrm{Im}\ v$ qui est libre. Forcément $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ est libre.

3. Commençons par la remarque suivante : Si $b = (b_i)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ et si pour tout endomorphisme u, on pose $\|u\|_b = \sum_{k=}^{p} \|u(b_k)\|$ alors $\|.\|_b$ est une norme sur $\mathbb{K}^p$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\|u(e_k)\| \leq \|u\|_b$.

a) On adopte la norme $\|.\|_e$ associée à la base $e = (e_i)$ de l'énoncé. Soit $k \in [\![1, p]\!]$, alors : $\|u_n(e_k) - u(e_k)\| = \|(u_n - u)(e_k)\| \leq \|u_n - u\|_e$. Puisque $\|u_n - u\|_e \longrightarrow 0$ alors $u_n(e_k) \longrightarrow u(e_k)$.

b) La famille $\left(u_n\left(e_1\right), u_n\left(e_2\right), \cdots, u_n\left(e_{r+1}\right)\right.$ est liée puisque $\operatorname{rg} u_n \leqslant r$. Donc il existe des scalaires non tous nuls $\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \cdots, \mu_{r+1,n}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \mu_{k,n} u_n\left(e_k\right)=0$. On pose alors $\alpha=\sum\limits_{k=1}^{r+1}\left|\mu_{k,n}\right|$ et pour tout $k \in \llbracket 1, r+1 \rrbracket$, $\lambda_{k,n}=\frac{\mu_{k,n}}{\alpha}$, donc $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \lambda_{k,n} u_n\left(e_k\right)=0$ et $\sum\limits_{k=1}^{r+1}\left|\lambda_{k,n}\right|=1$.

c) La suite $\left(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n}\right)_n$ est bornée puisque la norme ($\|.\|_1$) de chacun des ses termes vaut 1 . D'après le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, elle admet donc au moins une valeur d'adhérence, qu'on note $\left(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1}\right)$.

d) Soit $\left(\lambda_{1,\varphi(n)}, \lambda_{2,\varphi(n)}, \cdots, \lambda_{r+1,\varphi(n)}\right)_n$ une suite extraite de $\left(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \cdots, \lambda_{r+1,n}\right)_n$ qui converge vers $\left(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{r+1}\right)$. Pour chaque k la suite $\left(\lambda_{k,\varphi(n)}\right)_n$ converge vers μ_k. La suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\left(e_k\right)\right)_n$ converge vers $u\left(e_k\right)$ d'après la question **III-3-a)**. Quand n tends vers l'infini dans les égalités $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \lambda_{k,\varphi(n)} u_{\varphi(n)}\left(e_k\right)=0$ et $\sum\limits_{k=1}^{r+1}\left|\lambda_{k,\varphi(n)}\right|=1$, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \mu_k u\left(e_k\right)=0$ et $\sum\limits_{k=1}^{r+1}\left|\mu_k\right|=1$

Déduction : On a montré que pour toute famille $\left(e_1, e_2, \cdots, e_{r+1}\right)$ de vecteurs $\mathbb{K}^p$, $\left(u\left(e_1\right), u\left(e_2\right), \cdots, u\left(e_{r+1}\right)\right)$ est liée. Donc $\operatorname{rg}(u) \leqslant r$.

e) C'est une conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la fermeture d'une partie d'un espace vectoriel normé.

4. Si $r>0$, alors $\operatorname{rg}(A)<r$ si et seulement si $\operatorname{rg}(A) \leqslant r-1$, l'ensemble des matrices de rang inférieur strictement à r est donc I_{r-1}, c'est un fermé. $\mathcal{S}_r(\mathbb{K})=\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \backslash \mathcal{I}_r(\mathbb{K})$, c'est donc un ouvert.

Partie IV

1. a) Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, alors λ_k est une valeur propre de A, et puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité α_k de λ_k vaut la dimension du sous-espace propre associé à λ_k, donc par le théorème du rang, on a $\operatorname{rg}\left(A-\lambda_k I_p\right)=p-\alpha_k$. Soit $n \in \mathbb{N}$, les matrices A et A_n sont semblables donc il existe une matrice inversible Q_n tel que $A_n=Q_n A Q_n^{-1}$, par suite $A_n-I_p=Q_n\left(A-I_p\right) Q_n^{-1}$, donc A_n-I_p et $A-I_p$ sont semblables et compte tenu de la relation ci-dessus, on a $\operatorname{rg}\left(A_n-\lambda_k I_p\right)=p-\alpha_p$.

b) D'après la partie **III**, la partie $\mathscr{I}_{p-\alpha_k}(\mathbb{C})$ est un fermé et comme $\left(A_n-\lambda_k I_p\right)_n$ est une suite d'élément de $\mathscr{I}_{p-\alpha_k}(\mathbb{C})$ qui converge vers $B-\lambda_k I_p$, cette dernière matrice est un élément de $\mathscr{I}_{p-\alpha_k}(\mathbb{C})$, donc $\operatorname{rg}\left(B-\lambda_k I_p\right) \leq p-\alpha_k$.

c) On a pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \operatorname{dim} \operatorname{ker}\left(B-\lambda_k I_p\right) \geq \alpha_k>0$ donc λ_k est une valeur propre de B. De plus A est diagonalisable donc $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = p$ et on a donc $\sum_{k=1}^{m} \dim(\ker(B-\lambda_k I_p)) \geq p$, alors $\sum_{k=1}^{m} \dim(\ker(B-\lambda_k I_p) = p$. Ce qui signifie que B est diagonalisable et elle a les mêmes valeurs propres que A, avec les mêmes multiplicités. A et B sont donc semblables à une même matrice diagonale, elles sont donc semblables.

d) Ce qui précède démontre que $\mathcal{A}$ est un fermé.

2. a) $(A_n)_n$ converge vers B, donc $(\chi_{A_n})_n$ converge vers χ_B. Comme les matrices A_n sont semblables à A alors $\chi_{A_n} = \chi_A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\chi_B = \chi_A$.

b) Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Pour une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, les coéfficients de M^k sont des fonctions polynomiales des coéfficients de M, ce qui signifie que les applications composantes de l'application $\Psi_k : M \longmapsto M^k$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sont des fonctions polynomiales des coordonnées de M, elles sont donc continues et par suite Ψ_k est elle même continue. L'application $\pi : M \longmapsto \pi_A(M)$ est une combinaison linéaire des applications Ψ_k, elle est donc continue.

c) π est continue et $(A_n)_n$ converge vers B donc $(\pi_A(A_n))_n$ converge vers $\pi_A(B)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n$ est semblable à A, soit P_n une matrice inversible telle que $A_n = P_n A P_n^{-1}$. On a alors $\pi_A(A_n) = P_n \pi_A(A) P_n^{-1} = 0$. On en déduit que $\pi_A(B) = 0$. A est diagonalisable donc son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples. Comme π_A est un polynôme annulateur de B alors B est diagonalisable.

d) $\chi_A = \chi_B$ donc A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. A et B sont en plus diagonalisables donc elles vont être semblables à une même matrice diagonale. Elles sont donc semblables ie $B \in \mathcal{A}$.

3. a) $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, donc elle est trigonalisable, d'où l'existence de la matrice T. En outre T ne peut être diagonalisable, sinon A serait diagonalisable.

b) Posons $T = (\alpha_{i,j})_{i,j}$ et $D_n T D_n^{-1} = \left(\beta_{i,j}^{(n)}\right)_{i,j}$. On a alors

$$\beta_{i,j}^{(n)} = \alpha_{i,j} = 0 \text{ si } i > j, \beta_{i,j}^{(n)} = \alpha_{i,j} \text{ si } i = j \text{ et } \beta_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{n^{j-i}} \alpha_{i,j} \text{ si } i < j.$$

On voit ainsi que la suite $\left(D_n T D_n^{-1}\right)_n$ converge vers la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \cdots, \alpha_{p,p})$.

c) $\left(D_n T D_n^{-1}\right)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, mais sa limite D n'est pas dans $\mathcal{A}$ car sinon A serait diagonalisable. Donc $\mathcal{A}$ n'est pas un fermé.

Partie V

1. On a $I_p \in \mathscr{C}(A)$ en même temps cela donne $\mathscr{C}(A) \neq \emptyset$. Si $M_1, M_2 \in \mathscr{C}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $M_1 + \lambda M_2 \in \mathscr{C}(A)$ et $M_1 M_2 \in \mathscr{C}(A)$ (facile à démontrer pour $M_1 + \lambda M_2$. Pour $M_1 M_2$, on a $(M_1 M_2)A = M_1(M_2 A) = M_1(AM_2) = (M_1 A)M_2 = (AM_1)M_2 = A(M_1 M_2)$.) Il en résulte que $\mathscr{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

2. a) Posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ et soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice qui commute avec D, donc $DM - MD = 0$, or $DM - MD = ((\lambda_i - \lambda_j)a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, donc pour tout $i, j \in [\![1, p]\!]$, on a $(\lambda_i - \lambda_j)a_{i,j} = 0$. Si $i \neq j$ alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ et donc $a_{i,j} = 0$. Alors M est une matrice diagonale.

b) On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes. Soit une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(A) &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow D\left(P^{-1}MP\right) = \left(P^{-1}MP\right)D \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathscr{C}(D) \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}(A) = P\mathscr{C}(D)P^{-1}$. L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant un automorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a donc $\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\mathscr{C}(D)) = p$

3. a) Remarquons que l'application

$$\Phi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_p(\mathbb{K})\right), M \longmapsto \Phi_M$$

est linéaire. $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, Φ est donc continue. Alors $(\Phi_{A_n})_n$ converge vers Φ_A.

b) D'après la question **V-2)**, on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dim(\ker(\Phi_{A_n})) = \dim(\mathscr{C}(A_n)) = p$, donc $\operatorname{rg}(\Phi_{A_n}) = p^2 - p$. D'après la question **III-3)**. l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de rang $\leqslant p^2 - p$ est un fermé. Puisque $(\Phi_{A_n})_n$ converge vers Φ_A et $\operatorname{rg}\, \Phi_{A_n} = p^2 - p$ pour tout n, alors $\operatorname{rg}\, \Phi_A \leqslant p^2 - p$. Ainsi $\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\ker(\Phi_A)) \geq p$.

Partie VI

Dans cette partie on va confondre entre vecteurs de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et ceux $\mathbb{K}^p$

1. Supposons que $\sum\limits_{k=1}^{p} Y_k V_k^\top = 0$ et posons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $Y_k = (y_{1,k}, y_{2,k}, \cdots, y_{p,k})$. $Y_1{}^tV_1 + Y_2{}^tV_2 + \cdots + Y_p{}^tV_p$ est une matrice carrée d'ordre p dont la i $^{\text{eme}}$ ligne est le vecteur $\sum\limits_{k=1}^{p} y_{i,k} V_k^\top$. On a donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{p} y_{i,k} V_k^\top = 0$. La famille

$(V_1, V_2, \cdots, V_p)$ est libre donc pour tout $i \in [\![1,p]\!], y_{i,1} = y_{i,2} = \cdots = y_{i,p} = 0$. Ainsi $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_p = 0$.

2. Soit $(\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le p}$ une famille de scalaires tel que : $\sum\limits_{1\le i,j\le p} \alpha_{i,j} U_i V_j^\top = 0$. On alors $\sum\limits_{j=1}^{p} (\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} U_i) V_j^\top = 0$. et d'après la question précédente, la famille $(V_1, V_2, \cdots, V_p)$ étant libre, il en est de même de la famille $(V_1^\top, V_2^\top, \cdots, V_p^\top)$, par suite, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} U_i = 0$, et comme la famille $(U_1, U_2, \cdots, U_p)$ est libre alors $\alpha_{1,j} = \alpha_{2j} = \cdots = \alpha_{p,j} = 0$, et ceci pour tout $j \in [\![1,p]\!]$. Alors la famille $(U_i V_j^\top)_{i,j}$ est libre, et puisque $\dim(\mathcal{M}_p(\mathbb{K})) = p^2$, c'est une base de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$).

3. $\chi_A = \chi_{A^\top}$ donc A et $A^\top$ ont les mes valeurs propres et avec les mêmes multiplicités. A est diagonalisable, soit donc P, un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. En explicitant $P(A)$ on voit que $P(A^\top) = (P(A))^\top = 0$. Donc $A^\top$ est diagonalisable.

4. a) $\Phi_A(U_i V j^\top) = AU_i V_j^\top - U_i V_j^\top A$. Puisque $A^\top V_j = \lambda_j V_j$ alors $V_j^\top A = \lambda_j V_j^\top$ et donc $\Phi_A(U_i V_j^\top) = (\lambda_i - \lambda_j) U_i V_j^\top$.

b) D'après la question **VI-2)**, $(U_i V_j^\top)_{ij}$ est une base de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la question précédente indique qu'elle est formée de vecteurs propres de Φ_A. Alors Φ_A est diagonalisable et ses valeurs propres sont les scalaires $\lambda_i - \lambda_j$ où $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

5. $\dim(\ker(\Phi_\lambda))$ est le nombre de vecteurs de la base de diagonalisation $(U_i{}^t V_j)_{ij}$ tels que $\Phi_A(U_i{}^t V_j) = 0$, c'est donc le cardinal de l'ensemble :

$$C = \left\{ (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 / \lambda_i = \lambda_j \right\}$$

Soit λ une valeur propre de A et soit α sa multiplicité. Il y'a α^2 couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tels que $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$. On peut dire que $\alpha = \dim(E_\lambda(A))$, donc, si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ désignent les dimensions des sous espaces propres de A, alors :

$$\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\ker(\Phi_A)) = \mathrm{card}(C) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$$

6. A est diagonalisable donc $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = p$, puisque $\alpha_i^2 \ge \alpha_i$ pour tout i alors $\dim(\mathscr{C}(A) \ge p)$. Remarquons que $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$ si et seulement si $\alpha_i = 1$ pour tout i. Ceci signifie que dans le cas où A est diagonalisable, $\dim(\mathscr{C}(A)) = p$ si et seulement si A admet p valeurs propres deux à deux distinctes.