

Soit  $\mathbb{K}$  un corps.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  désigne l'anneau des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $I$  la matrice unité,
- $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{K})$  le sous-groupe des matrices de déterminant 1.
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  ${}^tA$  désigne la matrice transposée de  $A$ ,  $\text{tr}(A)$  la somme des coefficients diagonaux de  $A$ .
- On appelle commutateur tout élément de la forme  $UVU^{-1}V^{-1}$ , où  $U$  et  $V$  appartiennent à  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ .
- Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est dit normal si quels que soient  $h \in H, g \in G$ ,  $ghg^{-1}$  appartient à  $H$ .
- On note  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes et  $\mathbb{R}$  celui des nombres réels.
- On rappelle que deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables si et seulement si il existe  $P \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$  tel que  $B = P^{-1}AP$  si et seulement si  $A$  et  $B$  représentent le même endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dans des bases respectives de  $\mathbb{K}^n$ .
- On rappelle que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant et que si  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  alors sa trace  $\text{tr}(u)$  est celle d'une matrice qui le représente et son déterminant  $\det(u)$  est celui d'une matrice qui le représente.

## Partie I

### 1. Une caractérisation des homothéties

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 et  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  une base de  $E$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que :

$$(1) \quad \forall x \in E, (x, u(x)) \text{ est une famille liée}$$

- (a) Justifier l'existence de  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  tel que  $u(b_1) = \lambda_1 b_1$  et  $u(b_2) = \lambda_2 b_2$ .
- (b) Démontrer que  $\lambda_1 = \lambda_2$ . On note  $\lambda$  la valeur commune de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
- (c) Démontrer que  $u$  est l'homothétie vectorielle  $\lambda \text{Id}_E$  de rapport  $\lambda$ .

### 2. Caractérisation des matrices semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

- (a) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $e \in E$  tel que  $\mathcal{E} = (e, u(e))$  est une base de  $E$ . Démontrer que la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{E}$  est  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$  où  $\delta = \det(u)$  et  $\tau = \text{tr}(u)$ .
- (b) Démontrer que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est soit scalaire soit semblable à  $M' = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$  où  $t = \text{tr}(M)$  et  $d = \det(M)$ .
- (c) En déduire que deux matrices  $X$  et  $Y$  non scalaires de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  sont semblables si et seulement si elles ont même trace et même déterminant. Quand est ce que deux matrices scalaires  $\lambda I_2$  et  $\mu I_2$  sont semblables ?

(d) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

i. Vérifier que  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$  et  $\det(A) = \det(B)$  et que  $A$  et  $B$  ne sont pas scalaires.

ii.  $A$  et  $B$  sont-elles semblables ?

(e) Donner un exemple de deux matrices non scalaires  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  qui ont même trace et même déterminant et qui ne sont pas semblables.

### 3. Caractérisation des matrices semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

(a) Démontrer que pour tout  $s, p \in \mathbb{C}$ , le système :

$$(1) \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$$

admet des solutions. A quelle condition sur  $s$  et  $p$  le système (1) admet-il une solution unique ?

(b) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que  $A$  est semblable à une matrice ayant l'une des formes suivantes :

(1)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  avec  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

ou

(2)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

(c) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . On note  $d = \det(A)$  et  $t = \text{tr}(A)$ . Quelle relation doit lier  $d$  et  $t$  pour que  $A$  soit semblable à une matrice de la forme (2) ci-dessus ?

(d) Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  tel que  $\mu \neq 0$ . Démontrer que les matrices  $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  sont semblables.

### 4. Caractérisation des commutateurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

(a) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Vérifier que si  $A$  est un commutateur, alors  $PAP^{-1}$  est un commutateur quel que soit  $P \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ .

(b) Soit  $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ , où  $i^2 = -1$ . Calculer  $UVU^{-1}V^{-1}$ .

(c) Soit  $a \neq 0$  un nombre complexe tel que  $a^2 \neq 1$ . Calculer pour  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\text{tr}(X(b))$  où

$$X(b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+1 & -b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire que si  $A \neq \pm I$  est une matrice de déterminant égal à 1, alors il existe  $b \in \mathbb{C}$  tel que  $A$  soit semblable à  $X(b)$ .

(d) Pour  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\det A = 1$  ;

(ii)  $A = UVU^{-1}V^{-1}$ , où  $U$  et  $V$  appartiennent à  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ .

### 5. Décomposition en produit de deux matrices symétriques dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

(a) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe  $P \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  tel que  $A = PSP^{-1}$  où  $S$  est une matrice symétrique.

- (b) Montrer que  $A = S_1 S_2$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont des matrices symétriques et où  $S_2$  est inversible. (On pourra introduire la matrice  $PS^tP$ ).

#### 6. Sous-groupes normaux de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$

- (a) Soit  $H$  un sous-groupe normal de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$  contenant une matrice  $A \neq \pm I$ . Montrer que  $H$  contient une matrice de l'une des deux formes suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda^2 \neq 1; X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Pour  $a \in \mathbb{C}$ , montrer que pour tout  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $c(c^2 + 4) \neq 0$  et  $c^2 + a^2 = 1$ , la matrice  $Z(c)$  suivante :

$$Z(c) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

est semblable à une matrice diagonale.

En déduire que  $H$  contient toujours une matrice de la forme  $X_0$ .

- (c) Montrer que  $H = \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$  et déterminer tous les sous-groupes normaux de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ . (On pourra utiliser les matrices  $X(b)$  introduites dans 2)c ).

#### 7. Lien entre similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soient  $M$  et  $M'$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire qu'il existe  $P \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  tel que  $M' = P^{-1}MP$ . On se propose de démontrer que  $M$  et  $M'$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Pour cela on pose  $P = P_1 + iP_2$  avec  $P_1$  et  $P_2$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Pour tout nombre complexe  $t \in \mathbb{C}$ , on pose  $f(t) = \det(P_1 + tP_2)$ .

- (a) Montrer que  $P_1 M' = M P_1$  et  $P_2 M' = M P_2$ .  
 (b) Démontrer que pour tout  $t \in \mathbb{C}$ , on a  $f(t) = t^2 \det(P_2) + \lambda t + \det(P_1)$  où  $\lambda$  est un nombre complexe qu'on ne demande pas de calculer.  
 (c) Démontrer que la polynôme  $L(X) = \det(P_2)X^2 + \lambda X + \det(P_1)$  est un polynôme non nul de  $\mathbb{C}[X]$ .  
 (d) En déduire qu'il existe aux moins un nombre réel  $t_0$  tel que  $f(t_0) \neq 0$ . On pose alors  $Q = P_1 + t_0 P_2$ .  
 (e) Justifier que  $Q \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$  et en utilisant le résultat de la question **I.7.a)**, démontrer que  $M' = Q^{-1}MQ$ .  
 (f) Conclure.

8. **Application :** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $P \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $B = PAP^{-1}$  soit de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  où  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, a$  et  $b$  appartiennent à  $\mathbb{R}$ .

#### 9. Caractérisation des commutateurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- (a) Soient  $a \neq 0$  un nombre réel tel que  $a^2 \neq 1$ ,  $A \neq \pm I$  une matrice de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $X(b)$  soit semblable à  $A$ . En déduire que si  $A$  est un élément de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ , tel que  $A \neq -I$ , alors  $A = UVU^{-1}V^{-1}$ , où  $U$  et  $V$  appartiennent à  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .

- (b) Soient  $U \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ ,  $V \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$  tels que  $UV = -VU$ . Montrer que  $\text{tr}(U) = 0$  et que  $U$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

En déduire que  $V$  n'appartient pas à  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  et déterminer l'ensemble des commutateurs  $ABA^{-1}B^{-1}$  où  $A$  et  $B$  décrivent  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .

10. **Décomposition en produit de deux matrices symétriques dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . D'après la question **I.5.b**), on a  $A = S_1 S_2$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont des matrices symétriques complexes et où  $S_2$  est inversible. On pose

$$S_2^{-1} = T_1 + iT_2, S_1 = T'_1 + iT'_2$$

où  $T_1, T_2, T'_1, T'_2$  sont des matrices à coefficients réels.

- (a) Montrer que pour tout nombre complexe  $\lambda$ ,  $A(T_1 + \lambda T_2) = T'_1 + \lambda T'_2$ . Montrer qu'il existe au moins un nombre réel  $\lambda$  tel que la matrice  $T_1 + \lambda T_2$  soit inversible.
- (b) Montrer que toute matrice réelle d'ordre 2,  $A$ , peut s'écrire  $A = S'_1 S'_2$  où  $S'_1$  et  $S'_2$  sont deux matrices symétriques réelles, et où  $S'_2$  est inversible.

11. **Sous-groupes normaux de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$**

- (a) Soit  $H$  un sous-groupe normal de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  contenant une matrice  $A$  tel que

$$A \neq I \quad \text{et} \quad A \neq -I.$$

Montrer que  $H$  contient une matrice de l'une des trois formes suivantes

$$X_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda^2 \neq 1; X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, c \neq 0.$$

- (b) Montrer que  $H$  contient toujours une matrice de la forme  $X_0$ .
- (c) Déterminer tous les sous-groupes normaux de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .

## Partie II

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n > 1$  et soit  $\alpha \neq 1$  un nombre complexe tel que  $\alpha^n = 1$ ;  $p$  désigne le plus petit des entiers  $r$  non nuls tels que  $\alpha^r = 1$ .

1. Montrer que  $p$  divise  $n$ . On pose  $n = pm$  et soit  $(E_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ , une famille de  $p$  espaces vectoriels de dimension  $m$  tels que  $E = \bigoplus_{i=0}^{p-1} E_i$ . On définit un automorphisme  $u$  de  $E$  en posant

$$u(x) = \alpha^i x, x \in E_i, 0 \leq i \leq p-1.$$

2. Pour un automorphisme  $v$  de  $E$ , montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- (i)  $u \circ v = \alpha(v \circ u)$
- (ii)  $v(E_i) = E_{i+1}$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$  et  $v(E_{p-1}) = E_0$ .
3. Soit  $\alpha$  un nombre complexe tel que  $\alpha \neq 0$ . Montrer que  $\alpha I$  est un commutateur de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  si et seulement si  $\alpha^n = 1$ .
4. Soit  $\alpha$  une racine troisième de 1 tel que  $\alpha \neq 1$ . Déterminer explicitement deux éléments  $U$  et  $V$  de  $\mathbf{SL}(3, \mathbb{C})$  tels que  $UVU^{-1}V^{-1} = \alpha I$ .