

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, X/ENS 2025, filière PSI.
Version provisoire du 18/04/2025

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Partie I : Préliminaires

- (1) (a) L'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq f(0)\} = f^{-1}(]-\infty, f(0)])$$

est fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty, f(0)]$ par la fonction continue f .

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[, f(x) \geq f(0) + 1.$$

On en déduit que

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq f(0)\} \subset [-\alpha, \alpha]$$

et donc que $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq f(0)\}$ est borné.

- (b) Avec les notations précédentes,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf_{x \in [-\alpha, \alpha]} f(x).$$

La fonction f étant continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_* \in [-\alpha, \alpha]$ tel que

$$f(x_*) = \min_{x \in [-\alpha, \alpha]} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Si on veut un peu plus coller au "en déduire" de l'énoncé : d'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f est continue sur le fermé borné non vide $K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq f(0)\}$ donc y est minorée et atteint sa borne inférieure, qui est aussi la borne inférieure de f sur $\mathbb{R}$ puisque f prend des valeurs $> f(0)$ sur le complémentaire de K .

- (2) (a) Comme f est convexe, la fonction f' est croissante. Si $x \geq y$, on a

$$0 \leq f'(x) - f'(y) \leq L(x - y).$$

En multipliant par $f'(x) - f'(y) \geq 0$, on obtient

$$0 \leq |f'(x) - f'(y)|^2 \leq L(x - y)(f'(x) - f'(y)).$$

Le cas $y \geq x$ se traite de la même façon en remarquant que

$$(y - x)(f'(y) - f'(x)) = (x - y)(f'(x) - f'(y)).$$

- (b) On a

$$\begin{aligned} |\tilde{x} - \tilde{y}|^2 &= |x - y - \tau(f'(x) - f'(y))|^2 \\ &= |x - y|^2 - 2\tau(x - y)(f'(x) - f'(y)) + \tau^2(f'(x) - f'(y))^2 \\ &\stackrel{(a)}{\leq} |x - y|^2 - 2\tau(x - y)(f'(x) - f'(y)) + \tau^2 L(x - y)(f'(x) - f'(y)) \\ &= |x - y|^2 - \tau(2 - \tau L)(x - y)(f'(x) - f'(y)). \end{aligned}$$

- (c) Appliquons ce qui précède à $x = x_n$ et $y = x_*$. Comme x_* est un minimiseur de f , on a $f'(x_*) = 0$. De là,

$$\tilde{x} = x_{n+1} \text{ et } \tilde{y} = x_*$$

et en appliquant (b) :

$$|x_{n+1} - x_*|^2 \leq |x_n - x_*|^2 - \tau(2 - \tau L)(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*)).$$

Or, comme f' est croissante,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x - y)(f'(x) - f'(y)) \geq 0,$$

et comme $\tau > 0$ et $2 - \tau L \geq 0$, on en déduit finalement que

$$|x_{n+1} - x_*|^2 \leq |x_n - x_*|^2$$

et donc que la suite $(|x_n - x_*|)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Partie II : Convergence rapide, sous des hypothèses fortes

- (3) (a) On a pour tout x , $f'(x) = Lx$ et donc pour tout n ,

$$x_{n+1} = x_n - \tau L x_n = (1 - \tau L)x_n.$$

On en déduit de suite que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (1 - \tau L)^n x_0.$$

- (b) On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow -1 < 1 - \tau L < 1 \Leftrightarrow 0 < \tau < 2/L.$$

- (4) Comme g est convexe, sa dérivée g' est croissante, ce qui signifie que

$$x \mapsto f'(x) - \alpha x \text{ est croissante.}$$

L'énoncé confond allègrement la fonction $x \mapsto f'(x) - \alpha x$ et ses valeurs $f'(x) - \alpha x$, la fonction g et ses valeurs $g(x)$, ce que tout candidat sérieux à X-ENS s'interdit de faire bien sûr...

Comme f' est L -lipschitzienne, on a pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f'(x) - f'(0) \leq Lx.$$

Mais d'après ce qui précède, on a aussi pour tout $x \geq 0$,

$$f'(0) \leq f'(x) - \alpha x.$$

On en déduit que

$$\forall x \geq 0, \alpha x \leq Lx$$

et donc que $\alpha \leq L$.

- (5) Comme g est convexe, son graphe est situé au-dessus de sa tangente en 0, ce qui montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g(0) + g'(0)x,$$

ce qui se traduit par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(0) + f'(0)x + \alpha x^2/2.$$

Comme $\alpha > 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$: la question (1)(b) implique que f possède un minimiseur x_* sur $\mathbb{R}$.

- (6) Supposons $x \geq y$. Comme g' est croissante, on a

$$f'(y) - \alpha y \leq f'(x) - \alpha x$$

puis

$$\alpha(x - y) \leq f'(x) - f'(y).$$

En multipliant par $x - y \geq 0$, il vient

$$\alpha|x - y|^2 \leq (f'(x) - f'(y))(x - y).$$

Le cas $x \leq y$ se montre de façon analogue.

- (7) La fonction f étant α -convexe, elle est convexe et en utilisant (2)(b), on a

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x - y|^2 - \tau(2 - \tau L)(x - y)(f'(x) - f'(y)).$$

Puis à l'aide de (6), on a

$$-(f'(x) - f'(y))(x - y) \leq -\alpha|x - y|^2$$

et comme $2 - \tau L > 0$, il vient

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x - y|^2 - \alpha\tau(2 - \tau L)|x - y|^2 = |x - y|^2(1 - \alpha\tau(2 - \tau L)).$$

Remarquons que cette inégalité implique que $1 - \alpha\tau(2 - \tau L) \geq 0$.

- (8) On en déduit comme en (2)(c) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x_*|^2 \leq |x_n - x_*|^2(1 - \alpha\tau(2 - \tau L)).$$

En itérant cette inégalité (ou à l'aide d'une récurrence immédiate), il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x_*|^2 \leq (1 - \alpha\tau(2 - \tau L))^n |x_0 - x_*|^2$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x_*| \leq \rho^n |x_0 - x_*| \text{ avec } \rho = \sqrt{1 - \alpha\tau(2 - \tau L)}.$$

Comme $2/L > \tau$, on a bien $\rho < 1$ et l'estimation précédente illustre la convergence rapide annoncée par le titre de cette partie.

Partie III : Convergence lente, sous des hypothèses faibles

- (9) Comme les dérivées à gauche et à droite de f en 0 sont égales, la fonction f (qui est trivialement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \leq 0, f'(x) = 0 \text{ et } \forall x \geq 0, f'(x) = x^2.$$

La fonction f' étant croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$. De façon évidente, l'ensemble des minimiseurs de f est $\mathbb{R}^-$.

- (10) (a) Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n).$$

Montrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ que $x_n \in]0, 1/\tau[$.

L'initialisation est immédiate. Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Supposons que $x_n \in]0, 1/\tau[$. On a alors, puisque $x_n > 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \tau x_n^2 = x_n(1 - \tau x_n).$$

On en déduit par hypothèse de récurrence que

$$0 < x_{n+1} < x_n < 1/\tau,$$

ce qui achève l'hérédité et la récurrence.

On en déduit tout ce qui est demandé dans cette question :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n(1 - \tau x_n) \text{ et } 0 < x_{n+1} < x_n.$$

- (b) La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $l \in [0, x_0]$ vérifiant $l = l(1 - \tau l)$. Comme $x_0 < 1/\tau$, on a $l \leq x_0 < 1/\tau$ donc $l = 0$.
- (c) On a de suite

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n(1 - \tau x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1 - 1 + \tau x_n}{x_n(1 - \tau x_n)} = \frac{\tau}{1 - \tau x_n}.$$

De là,

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau}{1 - \tau x_k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \tau = n\tau.$$

Et donc

$$\frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{x_0} + n\tau = \frac{1 + n\tau x_0}{x_0}$$

et finalement

$$\boxed{x_n \leq \frac{x_0}{1 + n\tau x_0}}.$$

Commentaire personnel : comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \tau,$$

le lemme de Cesaro implique que $\boxed{x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\tau n}}$, ce qui illustre un peu plus clairement la convergence lente annoncée par le titre de cette partie.

- (11) Distinguons trois cas suivant la position de x_0 .

Si $x_0 \leq 0$: la suite (x_n) est constante égale à x_0 et converge donc bien vers un minimiseur.

Si $x_0 \in]0, 1/\tau[$: ce cas est traité par la question précédente, la suite (x_n) converge vers 0.

Si $x_0 \geq 1/\tau$: alors $x_1 = x_0(1 - \tau x_0) \leq 0$ et la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est constante égale à $x_1 \leq 0$.

Dans tous les cas, la suite $\boxed{(x_n)}$ converge vers un minimiseur de f .

- (12) (a) *Question étrange : pour une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$, la position du graphe de f par rapport à ses tangentes est explicitement au programme de la filière PSI. L'énoncé transforme cette question en une question de cours avec indication ?*

Le graphe de f est situé au dessus de ses tangentes, en particulier au dessus de sa tangente au point x , ce qui donne

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x).$$

Afin de se plier à l'énoncé, redonnons l'argument : si $x \leq y$, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f((1 - t)x + ty) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)),$$

d'où

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

En faisant tendre t vers 0, il vient

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

puis

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x).$$

Le cas $x \geq y$ se traite de façon analogue.

- (b) Supposons à nouveau que $x \leq y$. Comme f' est L -lipschitzienne, on a pour tout $z \in [x, y]$,

$$f'(z) - f'(x) \leq L(z - x).$$

En intégrant cette inégalité par rapport à z pour $z \in [x, y]$, il vient

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) \leq \int_x^y L(z - x) dz = \frac{L}{2}(y - x)^2$$

et donc

$$\boxed{f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{L}{2}(y - x)^2}.$$

Le cas $x \geq y$ se traite de façon analogue.

(c) En appliquant ce qui précède à $y = x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n)$ et à $x = x_n$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \tau(f'(x_n))^2 + \frac{L}{2}\tau^2(f'(x_n))^2 = f(x_n) - \frac{\tau}{2}(2 - \tau L)(f'(x_n))^2}.$$

Comme $\frac{\tau}{2}(2 - \tau L) \geq 0$, on en déduit que $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que la suite $\boxed{(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}}$ est décroissante.

(13) Supposons que $x > x_*$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_*, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = f'(c).$$

Comme f' est croissante, on a

$$0 = f'(x_*) \leq f'(c) \leq f'(x)$$

et il vient

$$\boxed{0 \leq f(x) - f(x_*) = (x - x_*)f'(c) \leq |x - x_*||f'(x)|}.$$

Le cas où $x < x_*$ se traite de façon analogue.

(14) Commençons par remarquer que s'il existe n_0 tel que $x_{n_0} = x_*$, alors $x_n = x_*$ pour tout $n \geq n_0$ et l'inégalité demandée dans cette question est une égalité pour tout $n \geq n_0$.

On peut donc supposer que $x_n \neq x_*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (13) et (12)(c) pour $x = x_n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \frac{\tau}{2}(2 - \tau L) \frac{|f(x_n) - f(x_*)|^2}{|x_n - x_*|^2}.$$

D'après (2)(c), on a de plus $|x_n - x_*| \leq |x_0 - x_*|$ pour tout n , ce qui permet d'affirmer que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \frac{\tau}{2}(2 - \tau L) \frac{|f(x_n) - f(x_*)|^2}{|x_0 - x_*|^2}}.$$

(15) On a comme en (10)(c)

$$\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_n(1 - ca_n)} = \frac{1}{a_n} + \frac{c}{1 - ca_n} \geq \frac{1}{a_n} + c.$$

De là,

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \geq \sum_{k=0}^{n-1} c = nc.$$

Et donc

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_0} + nc = \frac{1 + nca_0}{a_0}$$

et finalement

$$\boxed{a_n \leq \frac{a_0}{1 + nca_0}}.$$

(16) En posant $a_n = f(x_n) - f(x_*)$ et $c = \frac{\tau(2 - \tau L)}{2|x_0 - x_*|^2}$, (14) signifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n - c(a_n)^2.$$

En appliquant (15), il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n = f(x_n) - f(x_*) \leq \frac{a_0}{1 + nca_0}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et donc que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_*)}$.

(17) D'après (12)(c),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\tau}{2}(2 - \tau L)(f'(x_n))^2 \leq f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

En sommant ces inégalités de 0 à $n - 1$, il vient par télescopage

$$\frac{\tau}{2}(2 - \tau L) \sum_{k=0}^{n-1} (f'(x_k))^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) - f(x_{k+1})) = f(x_0) - f(x_n).$$

Comme $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(f(x_0) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc majorée. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum (f'(x_k))^2$ sont majorées. On en déduit que la série $\sum (f'(x_k))^2$ est convergente et qu'en particulier son terme général tend vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$.

- (18) (a) Comme $|x_n - x_*| \leq |x_0 - x_*|$ pour tout n , la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass admis par l'énoncé.
 (b) D'après (17), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_{\varphi(n)}) = 0$. Par continuité séquentielle de f' , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_{\varphi(n)}) = f'(x_{**})$$

et par unicité de la limite, $f'(x_{**}) = 0$.

- (c) Par convexité de f et (12)(a), on a $f(y) \geq f(x_{**})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc x_{**} est un minimiseur de f .
 Par ailleurs, la suite $(|x_n - x_{**}|)_{n \geq 0}$ est décroissante et possède une sous-suite convergent vers 0. On en déduit facilement qu'elle converge vers 0 et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_{**}$.

Partie IV : Descente de gradient proximale

(19) On a

$$F_{x_0}(x) \geq \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \tau f(x_*) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$$

donc F_{x_0} possède au moins un minimiseur sur $\mathbb{R}$ d'après (1)(b).

Supposons par l'absurde que F_{x_0} possède deux minimiseurs différents $x_1 \neq x_2$. Notons $m = F_{x_0}(x_1) = F_{x_0}(x_2)$. En utilisant l'inégalité fournie par l'énoncé (conséquence de la stricte convexité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(x - x_0)^2$), on a

$$\begin{aligned} F_{x_0}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2\right) + \tau f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \\ &\stackrel{f \text{ convexe}}{\leq} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2\right) + \tau\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}F_{x_0}(x_1) + \frac{1}{2}F_{x_0}(x_2) \\ &= m. \end{aligned}$$

Ainsi, $F_{x_0}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < m$, ce qui contredit le statut de m .

- (20) Supposons que x_0 est un minimiseur de f . Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{x_0}(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \tau f(x) \geq \tau f(x_0) = F_{x_0}(x_0).$$

Ceci montre que x_0 est l'unique minimiseur de F_{x_0} et donc que $x_0 = p_f(x_0)$.

Réciproquement, supposons que $x_0 = p_f(x_0)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{x_0}(x) \geq F_{x_0}(x_0) = \tau f(x_0).$$

En appliquant cette inégalité à $x = (1 - t)x_0 + tx_*$, il vient

$$\frac{1}{2}(t(x_* - x_0))^2 + \tau f((1 - t)x_0 + tx_*) \geq \tau f(x_0).$$

En supposant de plus $t \in [0, 1]$, on en déduit par convexité de f :

$$\frac{1}{2}(t(x_* - x_0))^2 + \tau(1 - t)f(x_0) + \tau tf(x_*) \geq \tau f(x_0)$$

puis

$$\frac{1}{2}(t(x_* - x_0))^2 + t\tau(f(x_*) - f(x_0)) \geq 0.$$

En simplifiant par $t > 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}t(x_* - x_0)^2 + \tau(f(x_*) - f(x_0)) \geq 0.$$

En passant à la limite lorsque t tend vers 0^+ , on obtient $\tau(f(x_*) - f(x_0)) \geq 0$ puis $f(x_*) \geq f(x_0)$, ce qui montre que x_0 est un minimiseur de f .

L'équivalence demandée est prouvée.

- (21) Comme x_1 est le minimiseur de la fonction F_{x_0} de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$F'_{x_0}(x_1) = 0$$

c'est-à-dire

$$(x_1 - x_0) + \tau f'(x_1) = 0$$

ou encore $x_1 = x_0 - \tau f'(x_1)$.

- (22) (a) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{x_0}(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \tau|x|.$$

La fonction

$$H : x \mapsto \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \tau x$$

est minimale en $x_0 - \tau$, la fonction

$$G : x \mapsto \frac{1}{2}(x - x_0)^2 - \tau x$$

est minimale en $x_0 + \tau$.

Si $x_0 \geq \tau$: F_{x_0} est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $[0, x_0 - \tau]$ puis croissante sur $[x_0 - \tau, +\infty[$. Etant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est minimale en $x_0 - \tau$, ce qui montre que $p_f(x_0) = x_0 - \tau$ dans ce cas.

Les deux autres cas sont laissés au lecteur et gagnent à être illustrés par de jolis graphes.

- (b) Si $x_0 > \tau$, alors $x_n = x_0 - n\tau$ tant que $x_0 - n\tau \geq \tau$, puis $x_n = 0$ pour tout n tel que $x_0 - n\tau < \tau$. La suite (x_n) stationne donc à 0 à partir d'un certain rang.

Si $x_0 < -\tau$, le comportement est analogue.

Si $x_0 \in [-\tau, \tau]$, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est constante égale à 0.

- (23) Comme x_1 est le minimiseur de F_{x_0} , on a $F_{x_0}(x_0) \geq F_{x_0}(x_1)$, ce qui se traduit par

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 + \tau f(x_1) \leq \tau f(x_0).$$

De façon identique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 + \tau f(x_n) \leq \tau f(x_{n-1}),$$

ou encore

$$\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \tau(f(x_{n-1}) - f(x_n)).$$

En sommant ces inégalités pour n variant entre $M + 1$ et N , il vient par télescopage

$$\boxed{\frac{1}{2} \sum_{n=M+1}^N (x_n - x_{n-1})^2 \leq \tau \sum_{n=M+1}^N (f(x_n) - f(x_{n+1})) = \tau(f(x_M) - f(x_N))}.$$

On en déduit en particulier que pour tout N ,

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2 \leq \tau(f(x_0) - f(x_*)).$$

Comme en (17), on en déduit que la série à termes positifs $\sum (x_n - x_{n-1})^2$ est convergente et qu'en particulier, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0}$.

(24) On suppose $N > M$. On a

$$\begin{aligned} |x_N - x_M| &= \left| \sum_{n=M+1}^N (x_n - x_{n-1}) \right| \\ &\leq \sum_{n=M+1}^N |x_n - x_{n-1}| \\ &= \sum_{n=M+1}^N 1 \times |x_n - x_{n-1}| \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{\sum_{n=M+1}^N 1} \sqrt{\sum_{n=M+1}^N (x_n - x_{n-1})^2} \\ &\leq \sqrt{N - M} \sqrt{2\tau |f(x_M) - f(x_N)|} \\ &= \boxed{\sqrt{2\tau |N - M|} \sqrt{|f(x_M) - f(x_N)|}}. \end{aligned}$$

Le cas $M > N$ se traite de façon analogue.

Commentaire personnel : le résultat de cette question est sans intérêt pour la suite et probablement sans intérêt tout court.

(25) Comme $\tilde{x}$ est le minimiseur de F_x , on a

$$F_x(\tilde{x} + tv) \geq F_x(\tilde{x})$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{1}{2}(\tilde{x} - x)^2 + \tau f(\tilde{x}) \leq \frac{1}{2}(\tilde{x} + tv - x)^2 + \tau f(\tilde{x} + tv)}.$$

On a de même en changeant x en y et t en $-t$:

$$\frac{1}{2}(\tilde{y} - y)^2 + \tau f(\tilde{y}) \leq \frac{1}{2}(\tilde{y} - tv - y)^2 + \tau f(\tilde{y} - tv).$$

En additionnant ces deux inégalités et en multipliant par 2, il vient l'inégalité demandée

$$\boxed{\tau(f(\tilde{x}) + f(\tilde{y}) - f(\tilde{x} + tv) - f(\tilde{y} - tv)) \leq (\tilde{x} + tv - x)^2 + (\tilde{y} - tv - y)^2 - (\tilde{x} - x)^2 - (\tilde{y} - y)^2}.$$

(26) C'est immédiat en développant les carrés par identité remarquable.

(27) On doit montrer que pour tout $t \in [0, 1]$

$$f(\tilde{x}) + f(\tilde{y}) \geq f(\tilde{x} + t(\tilde{y} - \tilde{x})) + f(\tilde{y} - t(\tilde{y} - \tilde{x})) = f((1 - t)\tilde{x} + t\tilde{y}) + f(t\tilde{x} + (1 - t)\tilde{y}).$$

Or, par convexité de f , on a

$$(1 - t)f(\tilde{x}) + tf(\tilde{y}) \geq f((1 - t)\tilde{x} + t\tilde{y})$$

et

$$tf(\tilde{x}) + (1 - t)f(\tilde{y}) \geq f(t\tilde{x} + (1 - t)\tilde{y})$$

et on obtient l'inégalité voulue en sommant ces deux dernières inégalités.
On en déduit à l'aide de (25) et (26) que

$$0 \leq 2t(\tilde{y} - \tilde{x})(\tilde{x} - x + y - \tilde{y}) + o(t).$$

En divisant par $t > 0$, il vient

$$0 \leq 2(\tilde{y} - \tilde{x})(\tilde{x} - x + y - \tilde{y}) + o(1).$$

Par passage à la limite dans cette inégalité quand t tend vers 0^+ , il vient

$$0 \leq (\tilde{y} - \tilde{x})(\tilde{x} - x + y - \tilde{y}),$$

c'est-à-dire

$$0 \leq -(\tilde{y} - \tilde{x})^2 + (\tilde{y} - \tilde{x})(-x + y)$$

et finalement

$$\boxed{(\tilde{x} - \tilde{y})^2 \leq (\tilde{x} - \tilde{y})(x - y)}.$$

(28) On a donc

$$|p_f(x) - p_f(y)|^2 \leq |p_f(x) - p_f(y)| \times |x - y|.$$

Si $p_f(x) = p_f(y)$, il n'y a rien à dire. Sinon, on en déduit que

$$\boxed{|p_f(x) - p_f(y)| \leq |x - y|}.$$

Comme x_* est un minimiseur de f , $p_f(x_*) = x_*$ d'après (20). En appliquant l'inégalité précédente à $x = x_n$ et $y = x_*$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x_*| \leq |x_n - x_*|,$$

ce qui signifie que la suite $\boxed{(|x_n - x_*|)_{n \in \mathbb{N}}}$ est décroissante.

(29) D'après (23),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}) = 0,$$

donc

$$\boxed{x_{\varphi(n)+1} = x_{\varphi(n)} + (x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_{**}}.$$

On a par continuité séquentielle de l'application lipschitzienne p_f :

$$x_{\varphi(n)+1} = p_f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_f(x_{**}).$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\boxed{p_f(x_{**}) = x_{**}}$.

(30) Par (20) et la question précédente, $\boxed{x_{**} \text{ est un minimiseur de } f}$.

De plus, comme p_f est 1-lipschitzienne, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - x_{**}| \leq |x_n - x_{**}|.$$

Comme en (18)(c), la suite décroissante $(|x_n - x_{**}|)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergeant vers 0 donc converge vers 0, ce qui donne $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_{**}}$.

Partie V : Optimisation sur la boule unité

(31) Comme C est fermé, borné et non vide en dimension finie et comme f est continue, le théorème des bornes atteintes implique que f est minorée sur C et atteint sa borne inférieure : ceci signifie que $\boxed{f \text{ admet un minimiseur sur } C}$.

(32) Si $\|x_*\| < 1$, f possède un minimum en x_* qui est alors un point $\boxed{\text{intérieur}}$ de C : il s'agit donc d'un point critique de f , ce qui montre que $\boxed{\nabla f(x_*) = 0}$.

(33) (a) On a

$$\langle x, v \rangle = \langle x, x - y \rangle = 1 - \langle x, y \rangle.$$

Or, par Cauchy-Schwarz, $\langle x, y \rangle \leq 1$ avec égalité si et seulement si x et y sont positivement proportionnels, et donc égaux étant de norme 1, ce qui est exclu. On a donc $\boxed{\langle x, v \rangle > 0}$.

De même,

$$\boxed{\langle y, v \rangle = \langle y, x - y \rangle = \langle y, x \rangle - 1 < 0}.$$

(b) Comme (7) n'est pas satisfaite, on a $\nabla f(x_*) \neq 0$. On peut donc considérer le vecteur

$$y = -\frac{1}{\|\nabla f(x_*)\|} \nabla f(x_*).$$

Comme (7) n'est pas vérifié, $y \neq x_*$. En notant alors $v = x_* - y$, on a d'après (a) :

$$\langle x_*, v \rangle > 0 \text{ et } \langle y, v \rangle = -\frac{1}{\|\nabla f(x_*)\|} \langle \nabla f(x_*), v \rangle < 0,$$

ce qui donne bien

$$\langle x_*, v \rangle > 0 \text{ et } \langle \nabla f(x_*), v \rangle > 0.$$

Ecrivons alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$f(x_* - tv) = f(x_*) - t \langle \nabla f(x_*), v \rangle + o(t).$$

Pour $t > 0$ petit, on a

$$\|x_* - tv\|^2 = 1 - 2t \langle x_*, v \rangle + t^2 \|v\|^2 < 1$$

donc $x_* - tv \in C$ pour $t > 0$ petit. On en déduit que

$$0 \leq f(x_* - tv) - f(x_*) = -t \langle \nabla f(x_*), v \rangle + o(t).$$

En divisant par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0^+ , il vient $0 \leq -\langle \nabla f(x_*), v \rangle$ puis $\langle \nabla f(x_*), v \rangle \leq 0$, ce qui donne la contradiction voulue.

(34) La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 s'écrit pour x et h fixés et t tendant vers 0 :

$$f(x + th) = f(x) + t \langle \nabla f(x), h \rangle + o(t).$$

Or, M étant symétrique,

$$f(x + th) = f(x) - \frac{t}{2} \langle x, Mh \rangle - \frac{t}{2} \langle h, Mx \rangle - \frac{t^2}{2} \langle h, Mh \rangle = f(x) - t \langle Mx, h \rangle + o(t).$$

Par unicité du développement limité, il vient

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \langle \nabla f(x), h \rangle = -\langle Mx, h \rangle$$

puis $\boxed{\nabla f(x) = -Mx}$.

(35) Commençons par remarquer que f est à valeurs ≤ 0 sur $\mathbb{R}^d$. De plus comme M est symétrique positive, notons $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d$ les valeurs propres de M .

Si x_* est un minimiseur de f sur C de norme < 1 , alors $\nabla f(x_*) = -Mx_* = 0$ donc $x_* \in \text{Ker}(M)$ et $f(x_*) = 0$. Comme f est à valeurs ≤ 0 , ceci implique que f est nulle sur C et donc que f est nulle, et donc que $M = 0$, ce qui est exclu.

Si x_* est un minimiseur de f sur C de norme 1, alors d'après (33)(b) et (34), il existe $\lambda \geq 0$ tel que $-Mx_* = -\lambda x_*$. On en déduit que x_* est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ et que

$$f(x_*) = -\frac{\lambda}{2} \geq -\frac{\lambda_d}{2}.$$

Tout ceci montre que

$$\boxed{x_* \text{ est un minimiseur de } f \text{ sur } C \Leftrightarrow x_* \in \text{Ker}(M - \lambda I_d) \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}}.$$

(36) (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n : x_n = \frac{(I_d + \tau M)^n x_0}{\|(I_d + \tau M)^n x_0\|}.$$

Pour cela, on rappelle que si $A \in S_d^+(\mathbb{R})$ est une matrice réelle symétrique positive, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \|Ax\| \geq \lambda_{\min} \|x\|$$

où $\lambda_{\min} \geq 0$ est la plus petite valeur propre de A (ce résultat se prouve en décomposant x dans une base orthonormée de vecteurs propres de A).

Initialisation : on a

$$\|x_0 - \tau \nabla f(x_0)\| = \|x_0 + \tau M x_0\| \geq (1 + \tau \lambda_1) \|x_0\| \geq 1$$

où $\lambda_1 \geq 0$ est la plus petite valeur propre de M . On en déduit que

$$x_1 = P_C(x_0 - \tau \nabla f(x_0)) = \frac{(I_d + \tau M)x_0}{\|(I_d + \tau M)x_0\|},$$

ce qui montre $\mathcal{P}_1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}_n$. On a alors par hypothèse de récurrence

$$\|x_n - \tau \nabla f(x_n)\| = \|x_n + \tau M x_n\| \geq (1 + \tau \lambda_1) \|x_n\| = (1 + \tau \lambda_1) \geq 1.$$

Puis à nouveau par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_C(x_n - \tau \nabla f(x_n)) \\ &= P_C((I_d + \tau M)x_n) \\ &= \frac{(I_d + \tau M)x_n}{\|(I_d + \tau M)x_n\|} \\ &= \frac{(I_d + \tau M)^{n+1}x_0}{\|(I_d + \tau M)^{n+1}x_0\|} \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{(I_d + \tau M)^{n+1}x_0}{\|(I_d + \tau M)^{n+1}x_0\|}. \end{aligned}$$

Ceci achève l'hérédité et la récurrence.

(b) Avec les notations de l'indication fournie par l'énoncé, on a immédiatement

$$(I_d + \tau M)^n x_0 = (1 + \tau \lambda)^n \sum_{i \in I} \left(\frac{1 + \tau \lambda_i}{1 + \tau \lambda} \right)^n \alpha_i e_i$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} \left(\frac{1 + \tau \lambda_i}{1 + \tau \lambda} \right)^n \alpha_i e_i = x'_0.$$

De là,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i \in I} \left(\frac{1 + \tau \lambda_i}{1 + \tau \lambda} \right)^n \alpha_i e_i}{\left\| \sum_{i \in I} \left(\frac{1 + \tau \lambda_i}{1 + \tau \lambda} \right)^n \alpha_i e_i \right\|} = \frac{x'_0}{\|x'_0\|}.$$

(37) Supposons $\|x_0\| < 1$. Deux cas se présentent alors.

Si $x_0 \in \text{Ker}(M)$. Une récurrence immédiate montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à x_0 .

Si $x_0 \notin \text{Ker}(M)$. Tant que $\|(I_d + \tau M)^n x_0\| < 1$, on a

$$x_n = (I_d + \tau M)^n x_0 = \sum_{i=1}^d (1 + \tau \lambda_i)^n \alpha_i e_i$$

où l'on a gardé les notations de la question précédente. Lorsque n augmente, les vecteurs ainsi construits ont une norme qui va dépasser 1 et l'on se retrouve dans la situation précédente. Si bien qu'il existe un entier N tel que

$$\forall n < N, x_n = (I_d + \tau M)^n x_0 = \sum_{i=1}^d (1 + \tau \lambda_i)^n \alpha_i e_i \text{ et } \|x_n\| < 1$$

et

$$\forall n \geq N, x_n = \frac{(I_d + \tau M)^{n-N+1} x_{N-1}}{\|(I_d + \tau M)^{n-N+1} x_{N-1}\|}.$$

On conclut alors comme précédemment que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{x'_0}{\|x'_0\|}}.$$

- (38) D'après ce qui précède ((35), (36) et (37)), la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un minimiseur de f sur C si (et seulement si), en gardant les notations de l'indication de (36)(b),

$$x'_0 \in \text{Ker}(M - \lambda_d I_d) \setminus \{0\}.$$

Comme $\mathbb{R}^d$ est la somme directe orthogonale des espaces propres de M , on en déduit que *pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \text{Ker}(M - \lambda_d I_d)^\perp$, *la suite* (x_n) *converge vers un vecteur* x_* , *de norme 1, vecteur propre pour* λ_d *et minimiseur de* f *sur* C . Par continuité de f ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_*) = \min_{x \in C} f(x).$$

Ceci montre *a fortiori* le résultat demandé en prenant n'importe quel hyperplan H contenant $\text{Ker}(M - \lambda_d I_d)^\perp$.