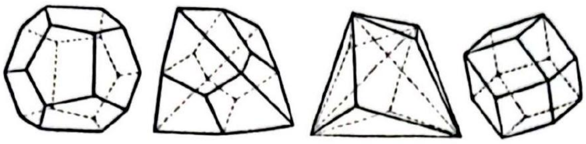
ENS Ulm 2025

Épreuve de mathématiques D, MP & MPI, six heures



Points entiers dans les polytopes

* * *

L'objectif de ce problème est de prouver une généralisation en dimension supérieure de l'égalité $\sum_{i=m}^{n-1} x^i = \frac{x^m - x^n}{1-x}$ où $m < n$ sont deux entiers, découverte par Michel Brion en 1988.

* * *

Le problème comprend une partie préliminaire, puis 5 parties numérotées de 1 à 5. Les parties 1 et 2 sont indépendantes entre elles. La partie 3 repose sur des notions et sur des résultats de la partie 2 . La partie 4 est indépendante des parties précédentes.

À tout moment il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet est long et comporte des questions délicates : il est tout à fait normal de bloquer sur des questions et il est possible de réussir l'épreuve sans traiter une part substantielle du sujet.

La clarté, la concision et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

* * *

Notations

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Pour un ensemble A on note $\operatorname{Card} A$ son cardinal.

Lorsque $n \geqslant 1$ est un nombre entier, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Partie préliminaire

Une fonction $P : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est dite *quasi-polynomiale* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(k+1)$ fonctions périodiques $c_0 \ldots, c_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ telles que $P(n) = \sum_{i=0}^{k} c_i(n) n^i$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si la fonction c_k n'est pas la fonction nulle, on dira que le *degré* de la fonction P est k et que la fonction c_k est son *coefficient dominant.*

(1). Montrer que l'ensemble des fonctions quasi-polynomiales forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(2). Montrer que si $P, Q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions quasi-polynomiales telles que $P(n) = Q(n)$ pour tout $n \geqslant 0$, alors $P = Q$.

Dans la suite, on dira que $P : N \to \mathbb{C}$ est *quasi-polynomiale* si c'est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une application quasi-polynomiale (uniquement définie grâce au résultat de la question **(2)**).

(3). Montrer qu'une fonction $P : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est quasi-polynomiale si et seulement si il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et m polynômes $P_0, \dots, P_{m-1}$ à coefficients complexes tels que pour tout $j \in \{0, \dots, m-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ congru à j modulo m, on ait $P(n) = P_j(n)$.

(4). Soit ω une racine de l'unité et $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R(n)x^n$ le développement en série entière de $\frac{1}{(1-\omega x)^p}$. Montrer que R est une fonction quasi-polynomiale puis déterminer son degré et son coefficient dominant.

1 Décomposition d'un entier en parties

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ un k-uplet d'entiers strictement positifs. Lorsque $k \geqslant 2$, on les suppose premiers entre eux dans leur ensemble. On définit une fonction $P : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) = \mathrm{Card}\left\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k : n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = n\right\},$$

puis on définit la série entière $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$.

(5). Montrer que le rayon de convergence de F est supérieur ou égal à 1.

(6). Prouver l'égalité $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^{a_i}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

(7). En déduire que P est une fonction quasi-polynomiale.

(8). Calculer le coefficient dominant de P.

On suppose dans la suite de cette partie que $k = 2$.

(9). On suppose dans cette question que $(a_1, a_2) = (2, 3)$. Construire une fonction $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de période 6 telle que $P(n) = \frac{n+\phi(n)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(10). On pose $a = a_1$, $b = a_2$, $\omega_a = \exp(2i\pi/a)$, $\omega_b = \exp(2i\pi/b)$. À partir d'un développement en éléments simples de la fraction $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)}$, montrer la formule

$$P(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^{jb}} + \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-kn}}{1-\omega_b^{ka}} \tag{$*$}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

(11). Démontrer que

$$P(n) = \frac{n}{ab} - \left\{\frac{b^* n}{a}\right\} - \left\{\frac{a^* n}{b}\right\} + 1$$

pour tout entier $n \geqslant 0$, où a^* et b^* sont des entiers vérifiant $a^* a = 1$ modulo b et $b^* b = 1$ modulo a respectivement.

Indication. On pourra utiliser la formule $(*)$ pour $b = 1$.

2 Étude des polytopes

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On commence par une série de définitions.

— On dit qu'un sous-ensemble compact non vide $P \subset \mathbb{R}^n$ est un *polytope* s'il existe un ensemble fini non vide I et si pour tout $i \in I$ il existe une forme linéaire $\ell_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et un réel $a_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$

— Pour toute partie $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $\vec{X}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les éléments de la forme $x - y$ où $x, y \in X$. On appelle *dimension* de P et on note $\dim P$ la dimension de $\vec{P}$.

— On dit que $F \subset P$ est une *face* de P si $F \neq \varnothing$ et s'il existe $J \subset I$ tel que $F = F_J$, où par définition

$$F_J = \{x \in P : \forall j \in J,\ \ell_j(x) = a_j\}\,.$$

— Réciproquement, si F est une face de P, on pose $S_F = \{i \in I,\ \forall x \in F, \ell_i(x) = a_i\}$. Enfin on appelle *intérieur relatif* de F l'ensemble F° défini par

$$F^\circ = \{x \in P : \ell_i(x) = a_i \Longleftrightarrow i \in S_F\}\,.$$

— On appelle *sommet* de P une face de dimension 0.

— Pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Conv}(X)$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ pouvant s'écrire $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i x_i$ où $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ et $t_1, \ldots, t_k$ sont des réels positifs ou nuls vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$. C'est *l'enveloppe convexe* de X, à savoir le plus petit ensemble convexe contenant X.

Dans la suite du sujet, on admettra que les notions de face et d'intérieur relatif ne dépendent que du polytope P, et pas du système d'équations choisi pour les représenter.

Enveloppe convexe des sommets

Dans cette section, on se donne un polytope $P \subset \mathbb{R}^n$.

(12). Vérifier que toute face F de P est un polytope et que $\dim F < \dim P$ si $F \neq P$.

(13). Montrer que P a un nombre fini de faces et au moins un sommet.

(14). Soit V l'ensemble des sommets de P. Montrer que $P = \mathrm{Conv}(V)$.

On fixe un ensemble fini non vide $V \subset \mathbb{R}^n$. La fin de cette section consiste à prouver que, réciproquement, $\mathrm{Conv}(V)$ est un polytope.

(15). Justifier que pour démontrer que $\mathrm{Conv}(V)$ est un polytope il suffit de traiter le cas où $\mathrm{Conv}(V)$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et contient 0 dans son intérieur.

(16). On suppose que $\mathrm{Conv}(V)$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et contient 0 dans son intérieur. Montrer que l'ensemble Q défini par

$$Q = \{\ell \in \mathbb{R}^n : \forall x \in V,\ \langle \ell, x\rangle \leqslant 1\}$$

est un polytope de $\mathbb{R}^n$.

(17). En déduire que $\mathrm{Conv}(V)$ est un polytope.

On admettra que pour tout convexe fermé non-vide $C \subset \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$ pour tout $z \in C$.

(18). Prouver que tout sommet de $\mathrm{Conv}(V)$ appartient à V.

2.1 Formule d'Euler

Soit $\mathcal{F}_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{1}_X$ la fonction indicatrice de X définie par $\mathbb{1}_X(x) = 1$ si $x \in X$ et $\mathbb{1}_X(x) = 0$ si $x \notin X$.

Soit $\mathcal{U}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_n$ engendré par les fonctions $\mathbb{1}_P$ où P est un polytope de $\mathbb{R}^n$.

(19). Soit $f \in \mathcal{U}_1$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la limite de $f(y)$ quand y tend vers x tout en vérifiant $y > x$, notée $\lim\limits_{y \to x^+} f(y)$, existe et qu'il existe un nombre fini de réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq \lim\limits_{y \to x^+} f(y)$.

Si $f \in \mathcal{U}_1$, on définit $\chi_1(f)$ par la somme (ayant un nombre fini de termes non nuls)

$$\chi_1(f) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \left(f(x) - \lim_{y\to x^+} f(y) \right),$$

(20). On suppose que $n > 1$. Soit $f \in \mathcal{U}_n$. Pour $z \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_z : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ par $f_z(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Démontrer que $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$.

(21). Démontrer que la définition suivante permet de définir une forme linéaire $\chi_n : \mathcal{U}_n \to \mathbb{R}$. On définit $\chi_1(f)$ par la somme $\chi_1(f) = \sum_{x\in\mathbb{R}} (f(x) - \lim_{y\to x^+} f(y))$, puis pour $f \in \mathcal{U}_n$ avec $n > 1$, on pose

$$\chi_n(f) = \chi_1(g) \text{ avec } g \text{ défini par } g(z) = \chi_{n-1}(f_z) \text{ pour } z \in \mathbb{R}.$$

On montrera en même temps la formule $\chi_n(\mathbb{1}_P) = 1$ pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$ et on justifiera que χ_n est indépendante du système de coordonnées à savoir que pour toute application linéaire inversible $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on a $\chi_n(f \circ A) = \chi_n(f)$ pour tout $f \in \mathcal{U}_n$.

(22). Montrer que pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in P \setminus P^\circ$, il existe une face $F \subset P$ telle que $F \neq P$ et $x \in F$.

(23). Montrer que pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$ et $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim P}$.

(24). En déduire la formule d'Euler $\sum_F (-1)^{\dim F} = 1$ où F parcourt les faces de P.

2.2 Triangulations

À nouveau, nous avons besoin d'une série de définitions.

— On appelle *complexe* un ensemble fini non vide $\mathcal{C}$ de polytopes de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $P, Q \in \mathcal{C}$, $P \cap Q$ est soit vide, soit à la fois une face de P et de Q.

— On appelle $|\mathcal{C}| = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{C}} P$ la *réalisation* de $\mathcal{C}$.

— Une *face* de $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble $F \subset |\mathcal{C}|$ qui est une face de l'un des $P \in \mathcal{C}$.

— On note $\chi(\mathcal{C}) = \sum\limits_F (-1)^{\dim F}$ où F parcourt les faces de $\mathcal{C}$.

— On appelle *simplexe* un polytope de $\mathbb{R}^n$ de dimension k ayant $k+1$ sommets.

— On appelle *triangulation* de P un complexe formé de simplexes dont la réalisation est égale à P.

(25). Montrer que si P est un polytope de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$, l'ensemble de ses faces de dimension $k-1$ forme un complexe.

(26). Soit P un polytope de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$ et $x \in P^\circ$. Pour chaque face F de dimension $k-1$ de P on note $F_x = \mathrm{Conv}(F \cup \{x\})$. Montrer que la famille des F_x forme un complexe dont la réalisation est égale à P.

(27). Montrer que tout polytope admet une triangulation.

(28). Montrer que tout complexe $\mathcal{C}$ dont la réalisation est convexe vérifie $\chi(\mathcal{C}) = 1$.

3 Le polytope de Birkhoff

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients entiers. On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est *bistochastique* si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$M_{ij} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n M_{ik} = \sum_{k=1}^n M_{kj} = 1.$$

On note B_n l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et S_n le groupe symétrique d'ordre n.

(29). Montrer que B_n est un polytope et déterminer sa dimension.

(30). Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit $P^\sigma \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ comme suit : pour $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on pose $P^\sigma_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$, $P^\sigma_{ij} = 0$ sinon. Montrer que P^σ est un sommet de B_n pour tout $\sigma \in S_n$.

Les deux prochaines questions montrent que tout sommet de B_n est de la forme P^σ.

(31). On suppose que $M \in B_n \setminus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe une suite $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \ldots (r_k, s_k)$ de paires d'indices avec $k \geqslant 2$ telle que

$$0 < M_{r_i, s_i} < 1, \quad 0 < M_{r_i, s_{i+1}} < 1 \text{ et } (r_k, s_k) = (r_1, s_1),$$

puis qu'on peut supposer que tous les couples $(r_1, s_1), (r_1, s_2), (r_2, s_2), \ldots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (r_{k-1}, s_k)$ sont distincts.

(32). On suppose que $M \in B_n \setminus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. En déduire qu'il existe une matrice Q non nulle et $\epsilon > 0$ telle que $\{M + tQ, t \in [-\epsilon, \epsilon]\} \subset B_n$, et conclure que tout sommet de B_n est de la forme P^σ.

4 Développement des fractions rationnelles

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ on note $x^\gamma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ la fonction qui vaut 1 en γ et 0 ailleurs. On pourra aussi poser $1 = x^0$.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$. Si pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ on a $\mathrm{Card}\{i \in I : f_i(\gamma) \neq 0\} < \infty$, on note $g = \sum_{i \in I} f_i$ la fonction définie par $g(\gamma) = \sum_{i \in I} f_i(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. En particulier, pour tout $f \in \mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ on a

$$f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} f(\gamma) x^\gamma.$$

On note alors $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ formé des fonctions nulles en dehors d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$. Ainsi $\{x^\gamma : \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$ est une base de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

Pour $f, g \in \mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$, lorsque pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ on a $\mathrm{Card}\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n : \alpha + \beta = \gamma \text{ et } f(\alpha)g(\beta) \neq 0\} < \infty$, on définit fg par la formule

$$(fg)(\gamma) = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} f(\alpha) g(\beta)$$

pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. On admet que cette opération est commutative et associative quand elle est définie. On admet aussi que cette loi munit $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre commutative intègre et on notera $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ son *corps des fractions* défini ci-après.

Un élément de ce corps est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et $Q \neq 0$; deux éléments $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont identifiés si et seulement si $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$. Ces éléments s'ajoutent et se multiplient comme des fractions usuelles. On peut identifier $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ à la fraction $\frac{P}{1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.

On dit que $f \in \mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ est *rationnel* s'il existe $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ non nul tel que $Pf \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. On dit que f est *de torsion* s'il existe $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ non nul tel que $Pf = 0$. On note $\mathcal{R}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des éléments rationnels de $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ et $\mathcal{T}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des éléments de torsion de $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$.

(33). Dans le cas où $n = 1$, montrer que les inclusions $0 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ sont strictes.

(34). On définit une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathrm{I} : \mathcal{R} \to \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ de la façon suivante. Si $f \in \mathcal{R}$ vérifie $Qf = P$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, on pose $\mathrm{I}(f) = \frac{P}{Q}$. Montrer que I est bien définie, et que c'est une application linéaire de noyau $\mathcal{T}$ vérifiant $\mathrm{I}(Pf) = P\mathrm{I}(f)$ pour tout $f \in \mathcal{R}$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

(35). Soit $u : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ un morphisme de groupes injectif. Montrer qu'il existe une unique application $s_u : \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(a) $s_u(Pf) = P s_u(f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

(b) $\mathrm{I}(s_u(f)) = f$ pour tout $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.

(c) $s_u\left(\frac{1}{1-g}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n$ si g est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ avec $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $u(\gamma) > 0$.

5 Séries d'Euler-Maclaurin

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Si $\gamma \in \mathbb{R}^n$ on pose $\gamma + A = \{\gamma + a, a \in A\}$. Notons

$$E_A = \sum_{\gamma \in A \cap \mathbb{Z}^n} x^\gamma \in \mathbb{C}\left[[\mathbb{Z}^n]\right].$$

Si E_A est rationnel (au sens défini dans la partie 4), on posera $\mathrm{I}E_A = \mathrm{I}\left(E_A\right)$, où la fonction I a été définie à la question **(34)**.

5.1 Rationalité des séries associées aux cônes

(36). Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ on a

$$E_{A\cup B} + E_{A\cap B} = E_A + E_B \quad \text{et} \quad E_{\gamma + A} = x^\gamma E_A.$$

(37). Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ et

$$C\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_k\right) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i \gamma_i : (t_1, \ldots, t_k) \in [0, +\infty[^k \right\}.$$

Montrer que si $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ est une famille libre, $E_{v + C(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)}$ est rationnel pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

(38). Généraliser la question précédente dans le cas où $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{Z}^n$ est une famille de vecteurs pas forcément libre mais pour laquelle il existe une forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\ell\left(\gamma_i\right) > 0$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Indication. On pourra trianguler le polytope $P = \{x \in C\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_k\right) : \ell(x) = 1\}$.

5.2 Le théorème de Brion

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope défini par $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell_i(x) \leqslant a_i \text{ pour tout } i \in I\}$, où I est un ensemble fini et pour tout $i \in I$, $\ell_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et $a_i \in \mathbb{R}$.

On dit que P est *rationnel* si pour tout $i \in I$ on a $a_i \in \mathbb{Z}$ et $\ell_i(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$.

Soient $x \in P$ et $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$. On dit que y *voit* x si $[x, y] \cap P = \{x\}$, on a noté ici $[x, y] = \mathrm{Conv}(\{x, y\})$, le segment d'extrémités x et y. On note enfin Σ_y l'ensemble des points de P vus par y.

(39). Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$, Σ_y est la réalisation d'un complexe composé de faces de P.

(40). Prouver que si $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$, on a $\chi\left(\Sigma_y\right) = 1$.

Indication. On pourra choisir un hyperplan H et se ramener à montrer le même résultat pour $\{[y, z] \cap H : z \in \Sigma_y\}$.

(41). Soit F une face de P et

$$C_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in S_F,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$: montrer que y voit F, c'est-à-dire $F \subset \Sigma_y$, si et seulement si $y \notin C_F$.

Dans la suite de cette partie 5.2, on suppose que P est rationnel.

(42). Montrer que E_{C_F} est rationnel pour toute face F de P et que E_{C_F} est de torsion si $\dim F > 0$.

(43). Prouver l'égalité

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F} = E_P.$$

(44). En déduire le théorème de Brion : pour tout polytope rationnel P, E_P est rationnel et on a

$$\mathrm{I}E_P = \sum_{v \text{ sommet de } P} \mathrm{I}E_{C_v}.$$

5.3 Application au théorème d'Ehrhart

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{Z}^n$ et $P = \operatorname{Conv}(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Pour tout entier $t \in \mathbb{N}$, on note $tP = \{tx, x \in P\}$.

(45). Montrer l'égalité suivante pour $t \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}E_{tP} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{tv-v}\, \mathrm{I}E_{C_v}.$$

(46). Montrer qu'il existe un polynôme $f_P(x)$ à coefficients complexes tel que pour tout $t \in \mathbb{N}$ on ait $\operatorname{Card}(tP \cap \mathbb{Z}^n) = f_P(t)$.

(47). Supposons maintenant que P est un polytope rationnel. Montrer qu'il existe une fonction quasi-polynomiale f_P tel que $\operatorname{Card}(tP \cap \mathbb{Z}^n) = f_P(t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, notons

$$H_n(k) = \operatorname{Card}\left\{ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) : M_{i,j} \geqslant 0,\ \sum_{\ell=1}^{n} M_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} M_{\ell,j} = k \text{ pour } i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

(48). Montrer que $H_n(k)$ est un polynôme en k et déterminer son degré.